위상수학

김상배 교수 : xxx@hnu.kr
http://sbk.hnu.kr/Lectures
010-XXXX-7867
문자메세지, 카톡(공부내용 질문)

교과서 : Schaum's Outlines
일반위상수학, 이장우역, 경문사

수학 : 수와 도형

1) 도형 : 기하학

고대 이집트, 그리이스 플라톤의 아카데미, 유클리드 `원론'

2) 수 : 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 복소수

약수와 배수, 솟수(prime number), 정수론

방정식 : 미지수로 등식을 만든다.

대수학 : (대수=숫자를 대신 한 것 =문자=미지수)

방정식 풀기, 아벨, 갈르와-> 현대대수

3) 좌표 : 데카르트 (400년전 쯤), 해석기하학의 창시자

해석학: 무한히 ~ 한다. 함수

연속, 미분, 적분, 급수, 미분기하

4) 집합 : 실수집합을 기초로 추상구조로 확장됨.

수학 : 실수집합의 성질(대수,기하,해석)을 연구한다.

실수집합의 3가지 구조 : 연산구조, 순서구조, 연결구조

1) 연산(대수): 덧셈과 곱셈. 방정식 해법

2) 순서 : 전순서, 부분순서

3) 연결(위상) : 수렴. 연속. 해석기하

위상수학 : `연속'을 주제로 연구, 기하학과 연관.

위상수학을 위한 기초:

집합, 명제, 함수, 가산집합 에 대한 기초가 필요하다.

집합족 : $I = \{1,2\}$, $\{A_i\}_{i\in I}$

$$\begin{array}{ll} \forall\, i\in I,\ x\in A_i & \exists\, i\in I:\ x\in A_i \\ \Leftrightarrow x\in A_1 \text{ and } x\in A_2 & \Leftrightarrow x\in A_1 \text{ or } x\in A_2 \\ \Leftrightarrow x\in A_1\cap A_2 & \Leftrightarrow x\in A_1\cup A_2 \\ \Leftrightarrow x\in \bigcap_{i\in I} A_i & \Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} A_i \end{array}$$

드모르간의 법칙

$$(A_1\cap A_2)^c = A_1^c\cup A_2^c \qquad (A_1\cup A_2)^c = A_1^c\cap A_2^c$$

일반화된 드모로간의 법칙을 증명하라

1) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$ 2) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

증명)

1) $x\in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c$

$\Leftrightarrow \sim \left(x\in \bigcap_{i\in I} A_i\right)$

$\Leftrightarrow \sim \left(\forall\, i\in I, x \in A_i\right)$

$\Leftrightarrow \exists\, i\in I : x\notin A_i$

$\Leftrightarrow \exists\, i\in I : x\in A_i^c$

$\Leftrightarrow x\in \bigcup_{i\in I} A_i^c$

2) (숙제)

p and q $\rightarrow$ p (O)

철수와 영희는 학교에 갔습니다.

$\rightarrow$ 철수는 학교에 갔습니다. (O)

p or q $\rightarrow$ p (X)

철수 또는 영희는 학교에 갔습니다.

$\rightarrow$ 철수는 학교에 갔습니다. (X)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(1)철수가 학교에 출석하면 영희도 출석한다.

(2)철수가 학교에 출석 안했거나, 영희가 출석하고 있다.

(3)영희가 출석하지 않으면, 철수가 출석하지 않는다.

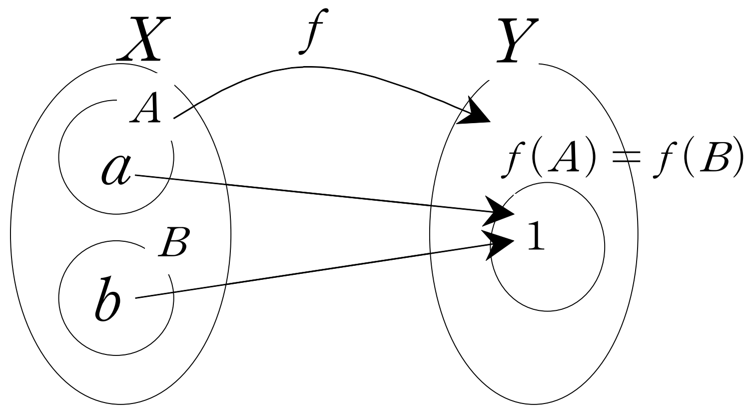
$(1) p \rightarrow q \equiv (2) \sim p \vee q \equiv (3) \sim q \rightarrow \sim p$ **: 3개의 진리표가 같다.**

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

$$f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$$
$$f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$$
$$f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$



$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

함수 $f: X \to Y$ **, 정의역, 공변역, 대응규칙**

전사함수 : $\forall y \in Y, \exists x \in X: f(x) = y$

단사함수 : $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

역함수 f^{-1} **가 존재 <=>** f**: 전단사함수**

가부번집합 = 번호를 붙일 수 있는 집합 (denumerable set)

= 자연수집합과 일대일 대응이 되는 집합

가산집합 = 세어나갈 수 있는 집합 (countable set)

= 유한집합 또는 가부번집합 (finite or denumerable)

(숙제) 1) 유리수와 무리수의 차이는 무엇일까?

2) 유리수집합이 가산집합임을 보여라.

제4장 직선과 평면의 위상

실해석학에서의 위상개념 (p 86)

실수집합 : 양끝이 무한히 뻗어가는 한 줄은 끈과 같은 모양.

개구간 = (a, b) = $\{x \in \mathrm{R} \,|\, a < x < b\}$: "연결" 의 기본단위(?)

개집합(열린집합) = 개구간들의 합집합으로 표시되는 집합

: "연결"상태 (붙은상태 or 떨어진 상태)의 도구

위상 = 모든 개집합들을 모은 집합 : 전체 연결 상태의 정보를 갖음.

[정리1] 개집합들의 임의 개의(특히 무한 개의) 합집합은 개집합이다.

(증명)

$\{G_i\}_{i \in I}$ 를 개집합들의 족(family)이라고 하자. 즉 개집합들의 집합.

$\forall i \in I,\ G_i$ 는 개집합이므로, 개구간들의 합집합으로 표시된다.

즉 $(\exists$ 개구간들 $(a_{i,j}, b_{i,j}) \wedge \exists J_i) : G_i = \bigcup_{j \in J_i} (a_{i,j}, b_{i,j})$

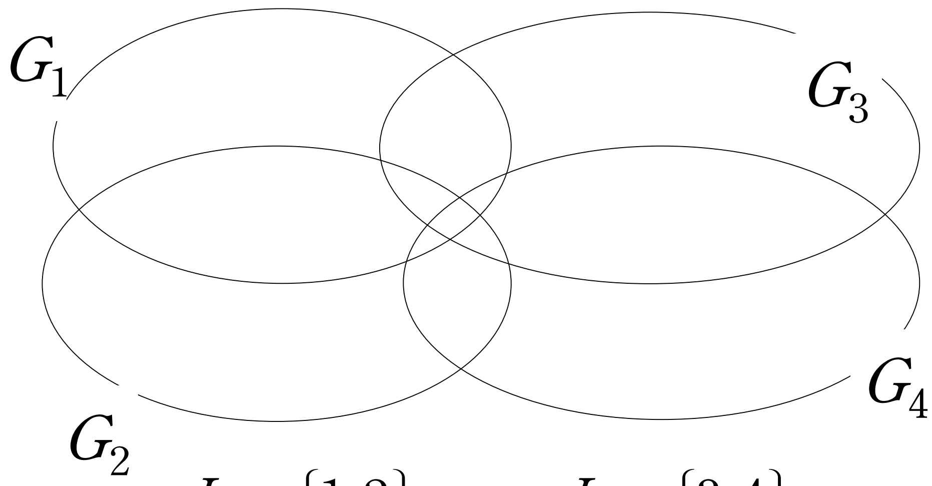
그러면 $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}(a_{i,j}, b_{i,j})$ **, 즉 합집합의 합집합.**

$$= \bigcup_{k\in J}(a_k, b_k)$$

여기서 $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ **이다. 합집합의 합집합은 합집합이 된다.**

따라서 $\bigcup_{i\in I} G_i$ **는 개구간들의 합집합이다. 즉 개집합이다. ■**

[예시]



$J_1 = \{1,2\}$ $J_2 = \{3,4\}$

$$\left(\bigcup_{i\in J_1} G_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in J_2} G_i\right)$$
$$= (G_1 \cup G_2) \cup (G_3 \cup G_4)$$
$$= G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$
$$= \bigcup_{i\in\{1,2,3,4\}} G_i$$
$$= \bigcup_{i\in\{1,2\}\cup\{3,4\}} G_i$$
$$= \bigcup_{i\in J_1\cup J_2} G_i$$
$$= \bigcup_{i\in J} G_i, \quad J = J_1 \cup J_2$$

[정리2] 개집합들의 유한개의 교집합은 개집합이다. (2개의 경우->유한개 경우로 쉽게 확장)

(증명) $x \in \left(\bigcup_{i \in I} I_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} J_j\right)$ **: 개구간들의 합집합들의 교집합**

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} I_i \quad \wedge \quad x \in \bigcup_{j \in J} J_j$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I : x \in I_{i_0} \quad \wedge \quad \exists\, j_0 \in J : x \in J_{j_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, i_0 \in I,\ \exists\, j_0 \in J : \ x \in (I_{i_0} \cap J_{j_0})$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$$

그러므로 $\left(\bigcup_{i \in I} I_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} J_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$ **이고 개구간들의 교집합** $(I_i \cap J_j)$**들은 다시 개구간이 되므로** $\bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$**은 개집합이다.**

따라서 개구간들의 합집합인 두 개집합들의 교집합 $\left(\bigcup_i I_i\right) \cap \left(\bigcup_j J_j\right)$ **은** $\bigcup_{i \in I, j \in J} (I_i \cap J_j)$**과 같은 집합이므로 개집합이 된다.** ■

집적점 (쌓인점:accumulation point) (극한점:limit point)

점 p를 실수의 부분집합 A의 집적점이라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ($p \in {}^{\forall} G$ 개집합, $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$)

유도집합

실수의 부분집합 A'를 A의 유도집합이라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} A'$ = $\{x \in \mathrm{R} \mid x$: A의 집적점 $\}$

= 집합 A 의 모든 집적점들의 집합.

[예제] $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots \right\}$의 유도집합을 구하여라.

(풀이) 다음페이지

(풀이)

(i) $p=0$ **인 경우**

점 $p=0$**을 포함하는 임의의 개집합** G**는 개구간들의 합집합**

$G=\cup_i(a_i,b_i)$**이므로,** $0\in G$**이면, 어떤 개구간** $(a_{i_0,}b_{i_0})$ **이 존재하여**

$0\in(a_{i_0},b_{i_0})\subset G$ **그런데** $G\setminus\{0\}$**의 부분집합인** $(0,b_{i_0})$**는 항상**

집합 A**의 원소를 포함하므로** $(G\setminus\{0\})\cap A\neq\phi$ **이다.**

그러므로 $p=0$**는 집합** A**의 집적점이다.**

(ii) $p\in(A\cup\{0\})^c$ **인 경우**

어떤 양의 실수 ϵ**에 대하여 구간** $G=(p-\epsilon,p+\epsilon)$**이**

집합 A**와 만나지 않도록 할 수 있다. 그러므로 당연히**

$(G\setminus\{p\})\cap A=\phi$**이 되고, 따라서** p**는** A**의 집적점이 아니다.**

(iii) $p \in A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$ **인 경우**

어떤 자연수 n**에 대하여** $p = \frac{1}{n}$**일 때,**

$\epsilon_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\epsilon_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ **이라면,**

$\epsilon_n < \epsilon_{n-1}$ **이므로, 구간** $(p - \epsilon_n, p + \epsilon_n)$**에 대하여,**

$(p - \epsilon_n, p + \epsilon_n) \cap A = \{p\}$**임을 알수 있다.**

그러므로 $G = (p - \epsilon_n, p + \epsilon_n)$**라고 하면** $(G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

따라서 p**는** A**의 집적점이 아니다.**

위 (i), (ii), (iii) 에 의하여 $A' = \{0\}$ **이다.** ■

[예제] 임의 실수 p**를 포함하는 모든 개집합들은** p**가 아닌 유리수를 포함하므로 유리수 집합의 유도집합은 실수집합이다. 즉** $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

[예제] 정수집합 Z**는 집적점을 갖지 않는다. 따라서** $Z' = \phi$.

[정리 4-3] 볼차노-바이어스트라스 정리

유계인 폐구간은 모든 무한 부분집합이 적어도 하나의 집적점을 갖는 집합이다.

($\Leftrightarrow$ 유계인 폐구간은 집적점 컴팩트 집합이다.)

폐집합

집합 A는 폐집합 (닫힌집합) 이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 집합 A의 여집합 A^c이 개집합이다.

[정리 4-4]

집합 A가 폐집합 $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$

(증명) PDF p26 참조

[예제] 폐구간 $A=[a,b]$은 폐집합이다.

(증명) $A^c=[a,b]^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$

$\Rightarrow A^c$**는 개구간의 합집합**

$\Rightarrow A^c$**는 개집합의 합집합**

$\Rightarrow$ A^c**는 개집합**

$\Rightarrow$ A**는 폐집합** ■

[예제] $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$**는 폐집합이 아니다.**

(풀이) $A'=\{0\}$**이므로** $A'\not\subset A$ **이다. 그러므로 정리 4-4에 의하여** A**는 폐집합이 아니다.**

[예제] 실수집합 R**과 공집합** ϕ **는 폐집합이다.**

[예제] 개폐구간 $(a,b]$**는 개집합도 폐집합도 아니다.**

피복과 개피복

1) 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$는 집합 A의 피복(덮개)이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

2) 집합족 $\{A_i\}_{i\in I}$는 집합 A의 개피복이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, (A_i : 개집합)

하이네-보렐 정리

유계인 폐구간$[a,b]$은 임의의 개피복이 유한 부분피복을 갖는 집합이다.

(

$\Leftrightarrow$

$[a,b] \subset \bigcup_{i\in I} G_i$ (G_i :개집합)

$\Rightarrow \exists \ G_1, G_2, \cdots, G_n \quad : \quad [a,b] \subset G_1 \cup G_2 \cup \ \cdots \ G_n$

$\Leftrightarrow$ 유계인 폐구간은 컴팩트 집합이다.)

제5장 위상공간의 정의

위상공간(Topological Space)

$X \neq \phi$의 부분집합족인 $\Im$가 다음 공리를 만족할 때 $\Im$를 X의 **위상(topology)** 이라 한다.

$$[O_1]\ X, \phi \in \Im$$

$$[O_2]\ (\forall i \in I,\ A_i \in \Im) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \Im$$

$$[O_3]\ (\forall i \in I(\text{유한집합}),\ A_i \in \Im) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \Im$$

$\Im$의 원소를 $\Im$-개집합 또는 그냥 개집합(열린집합, open set)이라 한다. $(X, \Im)$를 위상공간이라 한다.

[예제1.1] 실수집합 R에서 모든 개집합(=개구간들의 합집합)들의 집합인

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_i (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathrm{R} \ \wedge \ a_i < b_i \right\}$$

는 위 3가지 조건을 만족하는데, $\mathcal{U}$를 R위의 보통위상이라 한다.

[예제1.2] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 에 대하여 부분집합족,

$$\Im_1=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$
$$\Im_2=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$
$$\Im_3=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d,e\}\}$$

$\Im_1$ 은 3가지 조건을 다 만족하므로 위상이 된다.

$\Im_2$ 은 조건 $[O_2]$를 만족하지 않으므로 위상이 아니다.

$$\{a,c,d\}\cup\{b,c,d\}=\{a,b,c,d\}\notin\Im_2$$

$\Im_3$ 은 조건 $[O_3]$를 만족하지 않으므로 위상이 아니다.

$$\{a,c,d\}\cap\{a,b,d,e\}=\{a,d\}\notin\Im_3$$

[예제1.3] $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$가 집합 X의 멱집합일 때, $\mathcal{D}$는 위상의 3가지 조건을 만족하는데, 이 위상을 X의 **이산위상(discrete topology)**이라 하고 $(X,\mathcal{D})$를 **이산위상공간** 또는 **이산공간(discrete space)**이라 한다.

[예제1.4] $\mathcal{I} = \{X,\phi\}$도 위상의 3가지 조건을 만족하는데 이 위상을 X의 **밀착위상(indiscrete topology)**이라 하고 $(X,\mathcal{I})$를 **밀착위상공간** 또는 **밀착공간(indiscrete space)**이라 한다.

[예제1.5] $\mathcal{F} = \{G \subset X \mid G^c : \text{유한집합}\} \cup \{\phi\}$도 위상의 3가지 조건을 만족하는데, 이 위상을 X의 **여유한위상(cofinite topology)**이라 한다.

[숙제]

1) 집합 X 위의 두 위상의 공통집합도 X위의 위상이 됨을 보여라.

2) 집합 X 위의 두 위상의 합집합은 X위의 위상이 반드시 되는 것은 아님을 보여라.

주의 : 위상의 첫째 조건 $[O_1]$은 생략될 수 있다.

(이유) $[O_2]\ \forall i \in I$: 임의집합, $A_i \in \Im \Rightarrow \cup_{i\in I} A_i \in \Im$ **에서 번호집합**

I**가 공집합이면,** $\underset{i\in\phi}{\cup} A_i \in \Im$ **이되고** $\phi = \underset{i\in\phi}{\cup} A_i$**이므로** $\phi \in \Im$

$[O_3]\ \forall i \in I$: 유한집합, $A_i \in \Im \Rightarrow \underset{i\in I}{\cap} A_i \in \Im$ **에서 번호집합**

I**가 공집합이면,** $\underset{i\in\phi}{\cap} A_i \in \Im$ **이되고** $X = \underset{i\in\phi}{\cap} A_i$**이므로** $X \in \Im$

[명제] $\phi = \underset{i\in\phi}{\cup} A_i$

(증명) $x \in \underset{i\in\phi}{\cup} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \phi : x \in A_i \Leftrightarrow$ 거짓

[명제] $X = \underset{i\in\phi}{\cap} A_i$

(증명) $\forall x \in X,$

$$\begin{aligned} x \in \underset{i\in\phi}{\cap} A_i &\Leftrightarrow \forall i \in \phi : x \in A_i \\ &\Leftrightarrow (i \in \phi \Rightarrow x \in A_i) \\ &\Leftrightarrow (\text{거짓} \Rightarrow x \in A_i) \Leftrightarrow \text{참} \end{aligned}$$

집적점 (쌓인점:accumulation point) (극한점:limit point)

점 p를 부분집합 A의 집적점이라고 한다. (표시: $p\in A'$)

정의

$\Leftrightarrow$ ($p\in {}^{\forall}G$ 개집합, $(G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$)

$\Leftrightarrow$ ($p\in {}^{\forall}G$ 개집합, $G\cap(A\setminus\{p\})\neq\phi$)

그러므로

$p\in(A')^{c}$ $\Leftrightarrow$ ($p\in {}^{\exists}G$ 개집합 : $G\cap(A\setminus\{p\})=\phi$)

$\Leftrightarrow$ ($p\in {}^{\exists}G$ 개집합 : $(G\setminus\{p\})\cap A=\phi$)

$\Leftrightarrow$ ($p\in {}^{\exists}G$ 개집합 : $G\cap A\subset\{p\}$)

$*$

($*$ 증명)

$$(G\setminus\{p\})\cap A=\phi$$

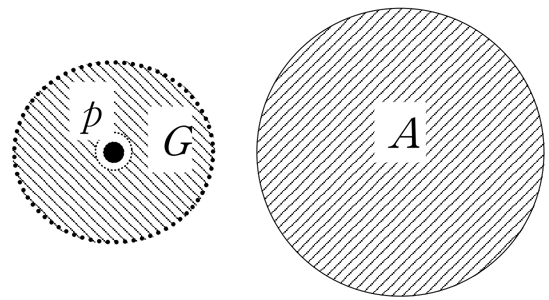
$$\Leftrightarrow\big(\,((G\setminus\{p\})\cap A=\phi\,)\ \wedge\ (p\in A\ \vee\ p\notin A)\big)$$

$$\Leftrightarrow\big(\,((G\setminus\{p\})\cap A=\phi\ \wedge\ p\in A\,)\ \vee$$

$$\big(\,((G\setminus\{p\})\cap A=\phi\ \wedge\ p\notin A\big)$$

$$\Leftrightarrow\ G\cap A=\{p\}\ \vee\ G\cap A=\phi$$

$$\Leftrightarrow\ G\cap A\subset\{p\}$$



$p\in G$, $(G\setminus\{p\})\cap A=\phi$

$p\in A\Leftrightarrow G\cap A=\{p\}$

$p\notin A\Leftrightarrow G\cap A=\phi$

유도집합

부분집합 A'를 A의 유도집합이라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ A' = $\{x \in \mathrm{R} \mid x$: A의 집적점 $\}$

= 집합 A 의 모든 집적점들의 집합.

[예제2.1] 집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$와 $A = \{a,b,c\}$와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서 A의 유도집합은 $A' = \{b,d,e\}$이다.

[숙제] X가 밀착위상일 때,

$A = \phi$이면 $A' = \phi$이고, $A = \{p\}$이면 $A' = \{p\}^c$이고,

A가 2개이상의 원소를 가지면, $A' = X$ 임을 보여라.

폐집합

$$\text{집합 } A\text{를 폐집합 (닫힌집합) 이라고 한다.} \overset{\text{정의}}{=} \text{집합 } A\text{의 여집합 } A^c\text{이 개집합}$$

[예제3.1] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$와 위상

$$\Im=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma=\{\phi,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e,\},\{a\}\}$$

이므로 ϕ, X 와 $A=\{b,c,d,e\}$는 개집합도 되고 폐집합도 된다.

$B=\{a,b\}$는 개집합도 폐집합도 아니다.

[예제3.2] 이산위상에서는 모든 집합이 개집합도 되고 폐집합도 된다.

[정리 5-3] 위상공간 $(X, \Im)$에서, $\Gamma = \{G^c \mid G \in \Im\}$를 모든 폐집합들의 집합이라 할 때, 다음이 성립한다.

$[C_1]\ \phi, X \in \Gamma$

$[C_2]\ (\forall i \in I, A_i \in \Gamma) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \Gamma$

$[C_3]\ (\forall i \in I$ **(유한집합)** $, A_i \in \Gamma) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \Gamma$

(증명) (1) $[O_1] \Rightarrow (\phi^c = X \in \Im) \wedge (X^c = \phi \in \Im)$

$\Rightarrow (\phi^c \in \Im) \wedge (X^c \in \Im)$

$\Rightarrow (\phi \in \Gamma \ \wedge X \in \Gamma) \Rightarrow [C_1]$

(2) $\forall i \in I, A_i \in \Gamma$

$\Rightarrow \forall i \in I, A_i^c \in \Im$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i^c \in \Im$, $by\ [O_2]$

$\Rightarrow (\bigcap_{i \in I} A_i)^c \in \Im$ **(드모르강의 법칙:** $\bigcup_{i \in I} A_i^c = (\bigcap_{i \in I} A_i)^c$ **)**

$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \in \Gamma$

[정리 5-4]

A가 **폐집합** $\Leftrightarrow$ $A' \subset A$

(증명)

A **가 폐집합**

$\Leftrightarrow$ A^c**가 개집합**

$\Leftrightarrow$ A^c**가 개집합들의 합집합**

$\Leftrightarrow$ $\exists G_i$ **개집합들 :** $A^c = \cup_i G_i$

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow \exists G$**개집합 :** $x \in G \subset A^c$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow \exists G$**개집합 :** $x \in G \ \wedge \ (G \setminus \{x\}) \subset A^c$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A^c \Rightarrow x \in {}^{\exists} G$**개집합 :** $(G \setminus \{x\}) \cap A = \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **([** $x \in {}^{\forall} G$**개집합,** $(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \phi$ **]** $\Rightarrow$ $x \in A$ **) (대우 이용)**

$\Leftrightarrow$ **(** $x \in A' \Rightarrow x \in A$ **)**

$\Leftrightarrow$ $A' \subset A$ ■

집합의 폐포

$$\overline{A} \overset{\text{정의}}{=}$$ **집합 A를 포함하는 모든 폐집합들의 교집합.**

[명제5-5]

(1) 폐포는 폐집합이다.

(2) $A \subset F$이고 F가 폐집합이면, $A \subset \overline{A} \subset F$

(3) A가 폐집합 $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}$

[예제4.1] 집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e,\}, \{a\}\}$$

이다. 따라서

$$\overline{\{b\}} = \{b,e\},\ \overline{\{a,c\}} = X,\ \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\} \quad \blacksquare$$

[예제4.2] 여유한공간 X에서의 집합 A의 폐포를 구하라.

(풀이)

여유한위상 = $\{\phi\} \cup \{A^c \mid A : \text{유한집합} \subset X\}$

폐집합들의 집합= $\{X\} \cup \{A \mid A : \text{유한집합} \subset X\}$

(1) 집합A가 유한집합이면, A가 폐집합이므로, by 명제5-5 (3),

$\overline{A} = A$**이다.**

(2) 집합A가 무한집합인 경우:

$(A \subset F)$ $\wedge$ **(F : 폐집합)**

$\Rightarrow (A \subset F)$ $\wedge$ **(** $(F = X)$ $\vee$ F**:유한집합)**

$\Rightarrow$ $F = X$ **, 이유: (무한집합 A) $\not\subset$ (유한집합 F)**

그러므로 A가 유한집합이면 $\overline{A} = A$

A가 무한집합이면 $\overline{A} = X$ ■

#15(p143) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

(증명)

$p \in A' \Leftrightarrow p \in {}^{\forall}G$: 개집합, $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$

여기에서 $A \subset B$ **이므로**

$((G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi) \Rightarrow ((G \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi)$ **이다.**

그러므로

$p \in {}^{\forall}G$: 개집합, $(G \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi$

즉 $p \in B'$ **이다.**

따라서 $A' \subset B'$ **이다.** ■

#17(p144) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

(숙제)

#25(p147) $A \cup A'$ **는 폐집합이다.**

(증명) $(A \cup A')^c$ **는 개집합임을 증명하자.**

$x \in (A \cup A')^c \Rightarrow x \in (A^c \cap (A')^c)$, **by 드모르간의 정리**

$\Rightarrow x \in A^c \wedge (x \in {}^{\exists}G$개집합$: (G \setminus \{x\}) \cap A = \phi)$

$\Rightarrow x \in {}^{\exists}G$개집합$: (G \cap A = \phi)$

$\Rightarrow \exists$ 개집합$G: x \in G \subset A^c$

여기에서 $p \in G$

$\Rightarrow (G \setminus \{p\}) \subset A^c$ **, by** $G \subset A^c$

$\Rightarrow (G \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

$\Rightarrow p \in (A')^c$

그러므로 $G \subset (A')^c$

$\Rightarrow \exists$ 개집합$G(= G_x): x \in G \subset (A^c \cap (A')^c)$

따라서 $(A \cup A')^c = \cup \left\{ G_x \mid x \in (A \cup A')^c \right\}$

: 개집합들의 합집합은 개집합이다. ■

[정리5-6] $\overline{A} = A \cup A'$ 을 증명하라.

(증명)

(1) $A \subset (A \cup A')$ 이고, by#25, $(A \cup A')$ 는 폐집합이므로

$A \subset \overline{A} \subset (A \cup A')$ 이다. 즉 $\overline{A} \subset (A \cup A')$ 이다.

(2) $A \subset \overline{A}$ 이므로 #15에 의하여 $A' \subset (\overline{A})'$ 이다.

그런데 $\overline{A}$ 는 폐집합이므로, [정리5-4]에 의하여 $(\overline{A})' \subset \overline{A}$ 이다.

그러므로 $A' \subset \overline{A}$ 이다.

따라서 $A \subset \overline{A}$ 와 $A' \subset \overline{A}$ 에 의하여 $(A \cup A') \subset \overline{A}$ ■

#27(p144) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

(증명) #15 와 [정리5-6]을 이용 --> (숙제)

#28(p144) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(증명) #27를 이용 --> (숙제)

폐포점(closure point)

$$p \text{ 는 } A\text{의 "폐포점"} \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ p \in \overline{A}$$

[명제] $p \in \overline{A} \Leftrightarrow (p \in {}^{\forall}G\text{개집합},\ G \cap A \neq \phi)$

(증명) $p \in \overline{A} \Leftrightarrow p \in \cap \{F \mid A \subset F\text{: 폐집합}\}$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{폐집합}F,\ (A \subset F \Rightarrow p \in F)\ \}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (A \subset G^c \Rightarrow p \in G^c\ )$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (p \not\in G^c \Rightarrow A \not\subset G^c),\ \textbf{(대우)}$$

$$\Leftrightarrow {}^{\forall}\text{개집합}G,\ (p \in G \Rightarrow G \cap A \neq \phi)$$

$$\Leftrightarrow p \in {}^{\forall}G\text{개집합},(\ G \cap A \neq \phi) \qquad \blacksquare$$

비교

$$p \in A' \Leftrightarrow (\ p \in {}^{\forall}G\text{개집합},\ (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi\ )$$

$$p \in \overline{A} \Leftrightarrow (\ p \in {}^{\forall}G\text{개집합},\ G \cap A \neq \phi)$$

조밀집합(dense subset)

$\overline{A} = X \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 집합 A는 X에서 조밀하다

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 집합 A는 X의 조밀부분집합이다

(예) 유리수집합 $\mathbb{Q}$ 는 집합 $\mathbb{R}$ 에서 조밀하다.

[예제4.4]

집합 $X = \{a,b,c,d,e\}$ 와 위상

$$\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$$

에서, 폐집합들의 집합은

$$\Gamma = \{\phi, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e,\}, \{a\}\}$$

이다. 따라서

$$\overline{\{a,c\}} = X,\ \overline{\{b,d\}} = \{b,c,d,e\}$$

그러므로 집합 $\{a,c\}$ 는 조밀집합이지만, $\{b,d\}$ 는 조밀집합이 아니다.

[명제 5-7] 쿠라토스키의 폐포정리(공리)

(1) $\overline{\phi}=\phi$ (2) $A\subset\overline{A}$ (3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (4) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$

(증명)

(1)(4) ϕ와 $\overline{A}$는 폐집합이므로 그 자신의 폐포와 같다.

(2) $\overline{A}=A\cup A'$ 이므로 $A\subset\overline{A}$

(3) #28에서 증명함. ■

주목 : 폐포공리 4개 만족하는 함수 $k:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$, $k(A)=\overline{A}$가 존재

$\Leftrightarrow$ A : 폐집합 정의 ($k(A)=A$)

$\Leftrightarrow$ A^c : 개집합 정의 (A^c: 개집합 $\Leftrightarrow A$: 폐집합)

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{I}$: 위상 정의 ($\mathfrak{I}=\{A\mid A:\text{개집합}\}$)

집합의 내점

점 p는 집합 A의 **내점**이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}\quad \exists\ \text{개집합}\ G : p\in G\subset A$$

집합의 내부

$$A^{o} \overset{\text{정의}}{=} \{p \in A \mid p: A\text{의 내점}\}$$

$$= \text{집합 } A\text{에 포함되는 모든 개집합들의 합집합}$$

[명제5-8]

(1) A^{o}**는 개집합이다.**

(2) 개집합 $G \subset A \Rightarrow G \subset A^{o} \subset A$

(3) A**: 개집합** $\Leftrightarrow A^{o} = A$

(증명)

(3) A**: 개집합** $\Rightarrow A \subset A^{o} \subset A$

$$\Rightarrow A^{o} = A$$

■

집합의 외부

$$A^E \overset{\text{정의}}{=} (A^c)^o = \text{집합 } A\text{의 여집합의 내부}$$

[명제] $(A^c)^o = (\overline{A})^c$ **(숙제)** $\overline{(A^c)} = (A^o)^c$

(증명) $p \in (A^c)^o \Leftrightarrow \exists$ 개집합 $G : p \in G \subset A^c$

$\Leftrightarrow (p \in {}^{\exists}G$개집합 $: G \cap A = \phi)$

$\Leftrightarrow p \in (\overline{A})^c$ ■

집합의 경계

$$A^b \overset{\text{정의}}{=} (A^o \cup A^E)^c = \text{집합 } A\text{의 내부점도 외부점도 아닌 점들의 집합}$$

[정리5-9] $\overline{A} = A^o \cup A^b$

(증명) $A^o \subset A$이고 $A^E \subset A^c$이므로 $A^o \cap A^E = \phi$이다. 정의에 따라

$A^b = (A^o \cup A^E)^c$이므로 $X = A^o \cup A^E \cup A^b$는 서로소의 합집합이다

따라서 $A^o \cup A^b = (A^E)^c = ((A^c)^o)^c = ((\overline{A})^c)^c = \overline{A}$ ■

[예제] 구간 $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$ 들의 내부는 (a,b) 이고 경계는 $\{a,b\}$ 이다.

[예제] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 위에 위상

$$\Im=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}$$

을 가진 위상공간 $(X,\Im)$의 부분집합 $A=\{b,c,d\}$ 생각해 보자.

점 c와 d는 개집합 $\{c,d\}$가 있어,

$$c\in\{c,d\}\subset A,\ d\in\{c,d\}\subset A$$

이므로 A의 내점이지만 $b\in G\subset A$인 그런 개집합 G가 존재하지 않아 A의 내점이 아니다. 그러므로 A의 내부는 $A^o=\{c,d\}$ 이다. A의 여집합 $A^c=\{a,e\}$ 에 대해서는 $a\in\{a\}\subset A^c$가 유일한 A^c 의 내점이다. 그러므로 A의 외부는 $A^E=(A^c)^o=\{a\}$ 이다. 따라서 A의 경계는 $A^b=X-A^o-A^E=\{b,e\}$로 주어진다.

조밀한 곳이 없는(nowhere dense)

집합 A**는 위상공간** X**에서 조밀한 곳이 없다.** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $(\overline{A})^o = \phi$

[예제5.5] 유리수집합의 부분집합 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ **는 내점을 갖지 않는다. 즉** $A^o = \phi$**이다. 하지만** A**는 실수집합** $\mathbb{R}$ **에서 조밀한 곳이 있다. 왜냐하면** $\overline{A} = [0,1]$ **이고** $(\overline{A})^o = (0,1) \neq \phi$ **이기 때문이다.**

근방

집합 A**는 점** p**의 근방이다.**

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ **개집합** G **:** $p \in G \subset A$

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **점** p**가 집합** A**의 내점이다.**

근방계

$\mathcal{N}_p \overset{\text{정의}}{=} \{A \mid A : p\text{의 근방}\}$

[명제5-10] 근방정리(공리)

(1) $\mathcal{N}_p \neq \phi \ \wedge \forall A \in \mathcal{N}_p, p \in A$

(2) $A, B \in \mathcal{N}_p \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{N}_p$

(3) $(A \in \mathcal{N}_p \wedge A \subset B) \Rightarrow B \in \mathcal{N}_p$

(4) $\forall A \in \mathcal{N}_p \ \exists G \in \mathcal{N}_p : (G \subset A \wedge (\forall x \in G, G \in \mathcal{N}_x))$

(증명)

(1) **전체 집합** $X \in \mathcal{N}_p$ **이므로** $\mathcal{N}_p \neq \phi$.

$A \in \mathcal{N}_p \Rightarrow A$**는** p**의 근방**

$\Rightarrow \exists$ **개집합** $G : p \in G \subset A$

$\Rightarrow p \in A$

(2) $A, B \in \mathcal{N}_p \Rightarrow \exists$ **개집합** G, H **: (** $p \in G \subset A \ \wedge \ p \in H \subset B$ **)**

$\Rightarrow \exists$ **개집합** $G \cap H$ **:** $p \in G \cap H \subset A \cap B$

$\Rightarrow A \cap B \in \mathcal{N}_p$

(3) $(A \in \mathcal{N}_p \wedge A \subset B) \Rightarrow$ ($\exists$ 개집합 G : $p \in G \subset A$) $\wedge$ ($A \subset B$)

$\Rightarrow$ $\exists$ 개집합 G : $p \in G \subset B$

$\Rightarrow$ $B \in \mathcal{N}_p$

(4) $A \in \mathcal{N}_p \Rightarrow$ $\exists$ 개집합 G : $p \in G \subset A$

여기에서 $x \in G \Rightarrow$ $\exists$ 개집합 G : $x \in G \subset G$

$\Rightarrow$ $G \in \mathcal{N}_x$ ■

주의 : 거꾸로, 집합 X 내의 모든 p 점에 대하여 [명제5-10]을 만족하는 근방계 $\mathcal{N}_p$ 가 주어진다면,

(G는 개집합 $\Leftrightarrow \forall p \in G, G \in \mathcal{N}_p$)

으로 개집합을 정의하여 위상공간을 만들 수 있다.

수렴열

위상공간 X에 속하는 **점렬** $< a_1, a_2, \cdots >$은 $b \in X$에 **수렴한다.**

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $b \in {}^\forall G$: 개집합, $\exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$

$$\Leftrightarrow \quad a_n \rightarrow b$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

이 때 b를 점렬 $< a_n >$ 의 극한이라고 한다.

[예제7.1] 밀착위상공간 X에서 점 $b \in X$를 포함하는 유일한 개집합은 X이다. 점열 $< a_n >$ 에 대하여 $\forall n \in \mathrm{N}$, $a_n \in X$이므로 $a_n \rightarrow b$이다.

[예제7.2] 이산위상공간 X에서 점 $b \in X$를 포함하는 개집합 중에 단일원 집합 $\{b\}$이 있다. 그러므로 $a_n \rightarrow b$ 이면 $\exists\, n_0 \in \mathrm{N}$: $(n > n_0 \Rightarrow a_n \in \{b\})$ 이어야 하므로, 점열은 $< a_n > \ = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots\}$이 된다.

[예제7.3] 무한집합 X상의 여가산위상공간에서도,

$$a_n \rightarrow b \ \Leftrightarrow\ < a_n > \ = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0}, b, b, b, \cdots\} \text{ 이다.}$$

(증명)

($\Leftarrow$) 은 당연하다.

($\Rightarrow$) $A=\{a_n \mid a_n \neq b\}$ 는 가산집합이므로 A^c 는 b 를 포함하는 개집합이다. $a_n \to b$ 이면 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in A^c)$ 이다. 그런데 A^c 안에는 $< a_n >$ 의 항들 중에서는 b 밖에 없다. 그러므로 $< a_n >$ 의 항 중에서 유한개를 제외한 나머지는 b 와 같다. ■

거친위상과 섬세한 위상

공집합이 아닌 집합 X 상의 두 위상 $\Im_1, \Im_2$ 에 대하여,

$$\Im_1 \subset \Im_2 \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \Im_1 \text{ 는 } \Im_2 \text{ 보다 거칠다 or 약하다 or 작다 라고 한다.}$$

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \Im_2 \text{ 는 } \Im_1 \text{ 보다 섬세하다 or 강하다 or 크다 라고 한다.}$$

[예제8.1] 집합 X 상의 임의의 위상은 밀착위상보다 크고, 이산위상보다 작다.

[예제8.2] 평면 R^2 상의 여유한위상 $\Im$ 은 보통위상 $\mathcal{U}$ 보다 거칠다. 왜냐하면 집합 A 가 여유한위상 $\Im$ 에 속하면 A^c 이 R^2 이거나 유한집합이다. 그러면 A^c 은 보통위상 $\mathcal{U}$ 에서 폐집합이므로 A 는 $\mathcal{U}$ 에서 개집합이다.

부분공간, 상대위상

A 를 위상공간 $(X,\Im)$ 의 공집합이 아닌 부분집합이라고 하자.
$\Im_A = \{A \cap G \mid G \in \Im\}$ 는 A 위에 하나의 위상이 되는데, 이것을 A 위의 **상대위상**이라고 한다. 위상공간 $(A, \Im_A)$ 를 $(X,\Im)$ 의 **부분공간**이라 한다

[예제9.2] 실수집합 R 의 부분공간인 폐구간 $A = [3,8]$ 에서 집합 $[3,5)$ 은 개집합이다. 왜냐하면 개구간 $(2,5)$ 는 R 에서 개집합이고, $[3,5) = (2,5) \cap A$ 이기 때문이다.

제6장 기저와 부분기저

집합론 연습

$\mathscr{B} = \{\{a,b\},\{c,d\}\}$ **이고,** $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{c,d\}$, $I = \{1,2\}$**이라면**

$$\cup \mathscr{B} = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cup A_2 = \{a,b\} \cup \{c,d\}$$

$$\cap \mathscr{B} = \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cap A_2 = \{a,b\} \cap \{c,d\}$$

기저

위상공간 $(X, \Im)$**에서,**

$\mathscr{B}(\subset \Im)$**는 위상** $\Im$**의 기저이다.**

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad \forall G \in \Im,\ \exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : G = \cup \mathcal{C}$$

$$(\Leftrightarrow \quad \forall G \in \Im,\ \forall p \in G,\ \exists B \in \mathscr{B} : p \in B \subset G\ )$$

[예제1.1]

(1) $(a,b)=\{x\in \mathrm{R} \mid a<x<b\}$ **일 때,**

$\mathscr{B}=\{(a,b) \mid a,b\in \mathrm{R}\}$**는 실수위상공간** R **의 기저가 된다.**

(2) $B((a,b),\epsilon)=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\epsilon\right\}$ **일 때,**

$\mathscr{B}=\left\{B((a,b),\epsilon) \mid (a,b)\in \mathrm{R}^2,\ \epsilon>0\right\}$**는 평면** R^2**의 기저가 된다.**

[예제1.2] $R((a,b),(c,d))=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \mid a<x<b \wedge c<y<d\right\}$ **을** R^2**상의 직사각형 영역이라고 하면,**

$\mathscr{B}=\{R((a,b),(c,d)) \mid a,b,c,d\in \mathrm{R}\}$**는 평면** R^2**의 기저가 된다.**

[예제1.4] $X=\{a,b,c\}$ **이고,** $\mathscr{B}=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ **는** X**상 어떤 위상의 기저가 되지 못한다. 왜냐하면** $\{a,b\}$ **와** $\{b,c\}$ **는 개집합이므로** $\{b\}=\{a,b\}\cap\{b,c\}$ **도 개집합이어야 되는데,** $\{b\}$ **는** $\mathscr{B}$ **의 원소들의 합집합으로 표시될 수 없기 때문이다.**

[정리6-1] 기저의 자격

집합 X의 부분집합족인 $\mathscr{B}$가 X위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

$\Leftrightarrow$ (1) $X = \cup\, \mathscr{B}$

(2) $\forall A, B \in \mathscr{B}$, $\exists\, \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : A \cap B = \cup\, \mathcal{C}$

(증명)

($\Longrightarrow$) $\mathscr{B}$가 X위의 위상 $\Im$의 기저라고 가정하자.

(1) $X \in \Im$ 이므로 기저의 정의에 의하여 $\exists\, \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : X = \cup\, \mathcal{C}$

그런데 $\cup\, \mathcal{C} \subset \cup\, \mathscr{B}$ 이므로 $X \subset \cup\, \mathscr{B}$ 이 성립한다. 따라서 $X = \cup\, \mathscr{B}$

(2) $\forall A, B \in \mathscr{B}$, $A, B \in \Im$ 이므로 $A \cap B \in \Im$ 이다. $\mathscr{B}$가 위상 $\Im$의 기저이므로, 기저의 정의에 따라, $\exists\, \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : A \cap B = \cup\, \mathcal{C}$ 이 된다.

($\Longleftarrow$)

$\Im = \{ \cup\, \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subset \mathscr{B} \}$가 X위의 한 위상이 됨을 보이자.

(O_1) $\mathcal{C} = \mathscr{B}$ 이면 $\mathcal{C} \subset \mathscr{B}$ 이므로 $X = \cup\, \mathscr{B} = \cup\, \mathcal{C} \in \Im$ 이다.

$\mathcal{C} = \phi$ 이면 $\phi \subset \mathscr{B}$ 이므로 $\phi = \cup\, \phi = \cup\, \mathcal{C} \in \Im$ 이다.

(O_2) $\{G_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{I}$ **이라면,** $\exists A_{i,j} \in \mathscr{B}$ **:** $G_i = \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$ **가 된다.**

그리하여 $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j} = \bigcup_{k\in J} A_k \in \mathfrak{I}$ **이다.**

여기서 $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ **이다. (참조: p11 예시)**

(O_3) $G, H \in \mathfrak{I}$ 이라면 $\exists \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathscr{B}$ **:** $G = \cup \mathcal{C}_1$ **,** $H = \cup \mathcal{C}_2$ **이다.**

$$G \cap H = (\cup \mathcal{C}_1) \cap (\cup \mathcal{C}_2)$$
$$= \cup \{A \cap B \mid A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\}$$
$$= \cup \{\cup \mathcal{C} \mid \exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : \cup \mathcal{C} = A \cap B, A \in \mathcal{C}_1, B \in \mathcal{C}_2\} \in \mathfrak{I}$$

여기에서 $\exists \mathcal{C} \subset \mathscr{B} : \cup \mathcal{C} = A \cap B$**는 가정에 의한 것이다.** ■

[예제1.5]

(1) $\mathscr{B}_u = \{(a,b] \mid a,b \in \mathrm{R} \wedge a < b\}$**는 기저의 자격 2가지를 만족한다.**

기저 $\mathscr{B}_u$ **가 만든 위상을 상한위상(upper limit topology) 이라고한다.**

(2) $\mathscr{B}_l = \{[a,b) \mid a,b \in \mathrm{R} \wedge a < b\}$**는 기저의 자격 2가지를 만족한다.**

기저 $\mathscr{B}_l$ **가 만든 위상을 하한위상(lower limit topology) 이라고한다.**

부분기저

어떤 위상공간 $(X,\Im)$에서 $\Im$의 부분집합 $\mathcal{S}$의 유한교집합들의 집합이 $\Im$의 기저를 이룰 때, $\mathcal{S}$를 $\Im$의 **부분기저**라고 한다.

[예제2.1] $\mathcal{S} = \{(a,\infty)\,|\,a\in \mathrm{R}\} \cup \{(-\infty,b)\,|\,b\in \mathrm{R}\}$ 는 실수위상공간의 부분기저가 된다. 왜냐하면 $(a,b) = (a,\infty) \cap (-\infty,b)$ 이기 때문이다.

[예제2.2] 평면 R^2 에서 수직인 무한띠와 수평인 무한 띠들은 R^2 위상공간의 부분기저가 된다. 왜나하면 수직무한띠와 수평무한띠의 교집합이 열린 직사각형이 되고, 열린직사각형 들은 R^2의 기저를 이루기 때문이다.

위상의 생성

[정리6.2] $\phi \neq {}^{\forall}\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ 를 부분기저로 갖는 X상의 유일한 위상$(\Im)$이 존재한다. (이때 $\mathcal{A}$ 는 $\Im$를 **생성한다**(generate)고 말한다.)

(증명) 다음페이지

$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A} \right\}$라고 하면 $\mathscr{B}$ 는 X상의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다. 왜냐하면

(1) $X = \cap \phi$ 이므로 $X \in \mathscr{B}$ 그러므로 $X = \cup \mathscr{B}$ 이 된다.

(2) $A, B \in \mathscr{B}$ 이라면

$\exists A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_m \in \mathscr{A}$:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,\ B = B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_m$$

그러므로 $A \cap B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap B_1 \cap B_2 \cap \cdots B_m$

이 되어 $A \cap B \in \mathscr{B}$ 이 된다.

그러므로 $\mathscr{A}$ 는 어떤 위상의 부분기저가 된다. 다음으로 생성된 위상의 유일성을 보이자. 만약 $\mathscr{A}$ 가 위상 $\Im_1$ 과 $\Im_2$의 부분기저라 하자.

$G \in \Im_1$ 라면 $\mathscr{A}$ 가 $\Im_1$ 의 부분기저이므로

$$\exists G_{i,j} \in \mathscr{A} : G = \cup_i \cap_j^{n_i} G_{i,j}$$

한편, $\mathcal{A}$ 가 $\Im_2$ 의 부분기저이므로 $\mathcal{A} \subset \Im_2$ 이다. 그러므로

$G_{i,j} \in \Im_2$ 인데, $\Im_2$ 가 위상이므로 $\cup_i \cap_j^{n_i} G_{i,j} \in \Im_2$

이다. 즉 $G \in \Im_2$ 이다. 그러므로 ($G \in \Im_1 \Rightarrow G \in \Im_2$) 즉 $\Im_1 \subset \Im_2$.

똑같은 원리로 $\Im_2 \subset \Im_1$. 그리하여 $\Im_1 = \Im_2$ 즉 위상은 유일하다. ■

(숙제)

[예제3.1] 부분집합족 $\{\{a,b\},\{b,c\},d\}$ 이 집합 $\{a,b,c,d\}$ 에 생성하는 위상을 구하여라.

[예제3.2] $(X, \leq)$ 를 공집합이 아닌 완전순서집합이라하자.

X상의 부분집합족

$$\mathcal{A} = \{\ \{x \in X \mid x < p\} \mid p \in X\ \} \cup \{\ \{x \in X \mid x > p\} \mid p \in X\ \}$$

에 의하여 생성되는 X상의 위상을 순서위상(order topology)이라 한다.

(예) 실수공간의 보통위상도 일종의 순서위상이라 볼 수 있다.

[명제6.3] 공집합이 아닌 집합 X상의 부분집합족 $\mathcal{A}$ 가 생성하는 위상 $\Im$ 은 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 X상의 모든 위상의 공통집합이다. 즉 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 X상의 모든 위상 중에서 가장 작은 위상이다.

(증명)

위상 $\Im$ 은 $\mathcal{A}$ 를 부분기저로 가지기 때문에 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 위상이다.

$\Im_i$ 를 $\mathcal{A}$ 를 포함하는 임의의 위상이라고 하자.

$G \in \Im \implies \exists\, S_{ij} \in \mathcal{A} : G = \bigcup_i \bigcap_{j=1}^{n_i} S_{ij}$ **, (여기서 $n_i \in \mathbb{N}$)**

$\implies G \in \Im_i$ **(이유: 위상 $\Im_i$ 가 $\mathcal{A}$ 를 포함하므로, $\mathcal{A}$ 의 모든 원소의 유한교집합과 임의의 합집합은 다시 $\Im_i$ 에 속한다.)**

그러므로 $\Im \subset \Im_i$이다. 그러므로

$\Im \subset \bigcap_i \{\Im_i \mid \Im_i$ **:** $\mathcal{A}$ **를 포함하는 X상의 위상** $\}$

그런데 $\mathfrak{I}$ 도 $\mathscr{A}$ 를 포함하는 X상의 위상 $\mathfrak{I}_i$ 중에 하나이므로 $\bigcap_i \mathfrak{I}_i \subset \mathfrak{I}$.

그러므로 $\mathfrak{I} = \bigcap_i \mathfrak{I}_i$ 이다. ■

국소기저

$p \in (X, \mathfrak{I})$ 에 대하여,

$\mathscr{B}_p$ 를 점 p 에서의 **국소기저(local base)**라고 한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad p \in {}^{\forall} G \in \mathfrak{I}, \ \exists B \in \mathscr{B}_p \ : p \in B \subset G$$

[예제4.1] 평면 R^2 위에서 점 p 를 중점으로 둔 개 원반족

$$\left\{ B(p, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathrm{R}^2, n \in \mathrm{N} \right\}$$

은 점 p 의 국소기저가 된다.

[정리6-4] $\mathscr{B}$ 가 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$의 기저이고 $p \in X$ 일 때,

$\{ B \in \mathscr{B} \mid p \in B \}$는 점 p의 국소기저가 된다.

[정리6-5] **위상공간** $(X,\Im)$**에서,** $p\in X,\ A\subset X$ **이고,** $\mathscr{B}_p$**가** p**의 국소기저 일 때, 점** p**의 집합** A**의 집적점이다**

$$\left(\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}\ p\in {}^{\forall}G\in\Im,\ (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi \right)$$

$$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}G\in\mathscr{B}_p,\ (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$$

(증명)

($\Longrightarrow$ **)** $G\in\mathscr{B}_p$

$\Longrightarrow p\in G\in\Im$

$\Longrightarrow\ (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$ **, by 가정**

($\Longleftarrow$ **)** $p\in G\in\Im$

$\Longrightarrow \exists B\in\mathscr{B}_p\ :\ p\in B\subset G$ **, (이유 :** $\mathscr{B}_p$**가 국소기저)**

$\Longrightarrow (B\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$ **by 가정**

$\Longrightarrow (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$ **(이유,** $(B\setminus\{p\})\subset(G\setminus\{p\})$ **)**

[명제6-6] **위상공간** $(X,\Im)$**에서,** $p\in X$ **이고,** $\mathscr{B}_p$ **가** p**의 국소기저**

일 때, $a_n \to p$ **(** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p\in {}^\forall G\in\Im,\ \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad {}^\forall G\in\mathscr{B}_p,\ \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$$

[따름정리6-7]

$\mathscr{B}$ **가 위상공간** $(X,\Im)$**의 기저이고** $p\in X, A\subset X$**라 하자.**

(1) 점 p**의 집합** A**의 집적점이다**

($\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p\in {}^\forall G\in\Im,\ (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad p\in {}^\forall G\in\mathscr{B},\ (G\setminus\{p\})\cap A\neq\phi$$

(2) $a_n \to p$ **(** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p\in {}^\forall G\in\Im,\ \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$ **)**

$$\Leftrightarrow \quad p\in {}^\forall G\in\mathscr{B},\ \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$$

(증명)

($\Longrightarrow$ **)** $p \in {}^{\forall} G \in \mathfrak{I}$, $\exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$

$\Rightarrow p \in {}^{\forall} G \in \mathscr{B}$, $\exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$, **(이유** $\mathscr{B} \subset \mathfrak{I}$**)**

($\Longleftarrow$ **)** $p \in G \in \mathfrak{I} \Longrightarrow \exists\, B \in \mathscr{B} : p \in B \subset G$ **, (이유 :** $\mathscr{B}$**는** $\mathfrak{I}$**의 기저)**

$\Rightarrow \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in B)$, **by 가정**

$\Rightarrow \exists\, n_0 : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in G)$, **(이유:** $B \subset G$**)**

7장. 연속성과 위상동형

연속함수

두 위상공간 사이의 함수 $f:(X,\Im_1) \to (Y,\Im_2)$는 연속함수이다.

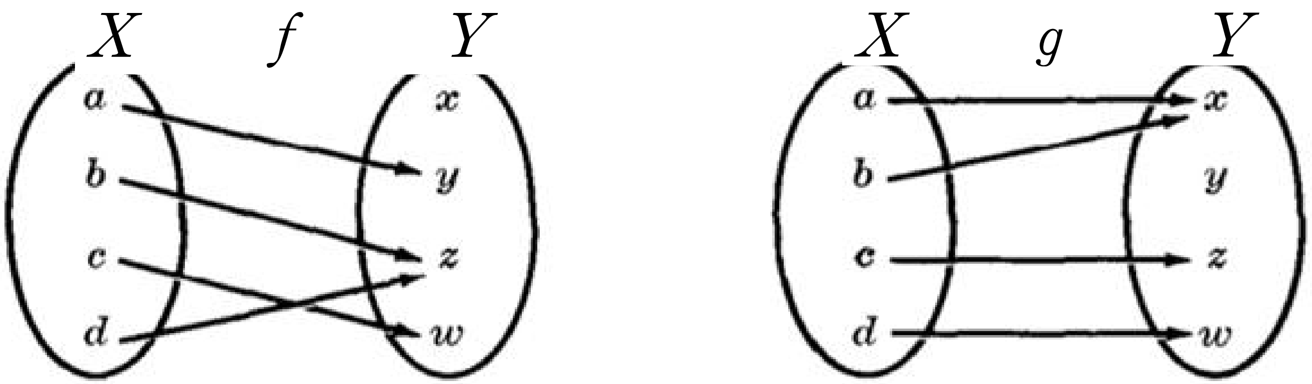
$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **(** $G \in \Im_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

[예제1.1] $X = \{a,b,c,d\}$, $Y = \{x,y,z,w\}$

$$\Im_1 = \{X, \phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

$\Im_2 = \{Y, \phi, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}, \{y,z,w\}\}$ **일 때,**

함수 $f: X \to Y$ **와** $g: X \to Y$ **를 생각하자.**



Y상의 위상 $\Im_2$의 각 원소의 역이 X상의 위상 $\Im_1$의 원소가 되므로 함수 f는 연속함수이다. 하지만 $\Im_2$의 원소 $\{y, z, w\}$ 의 역상 $g^{-1}(\{y,z,w\}) = \{c,d\}$ 는 $\Im_1$의 원소가 아니므로 g는 연속이 아니다.

[명제7-1] $\mathscr{B}$가 위상 $\Im_2$의 기저일 때,

$f:(X,\Im_1) \to (Y,\Im_2)$ **가 연속함수**

($\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $G \in \Im_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

$\Leftrightarrow$ **(** $G \in \mathscr{B} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

(증명)

$(\Rightarrow)$

$G \in \mathscr{B} \;\Rightarrow\; G \in \Im_2$ **(이유: $\mathscr{B} \subset \Im_2$)**

$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **(by 가정)**

$(\Longleftarrow)$

$$G \in \Im_2 \Rightarrow \quad \exists\, G_i \in \mathscr{B} : G = \bigcup_{i \in I} G_i$$ **(이유: $\mathscr{B}$ 가 $\Im_2$의 기저)**

$$\Rightarrow f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i)$$

여기에서 $f^{-1}(G_i) \in \Im_1$ **(by가정)**

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) \in \Im_1$$ **(이유: 개집합들의 합집합은 개집합)**

$$\Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1 \quad \blacksquare$$

[정리7-2] $\mathscr{S}$ **가 위상** $\Im_2$**의 부분기저일 때,**

$f : (X, \Im_1) \to (Y, \Im_2)$ **가 연속함수**

($\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $G \in \Im_2 \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

$\Longleftrightarrow$ **(** $G \in \mathscr{S} \Rightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **)**

(증명)

$(\Longrightarrow)$

$G \in \mathcal{S} \Longrightarrow \ G \in \Im_2$ **(이유: $\mathcal{S} \subset \Im_2$)**

$\Longrightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1$ **(by 가정)**

$(\Longleftarrow)$

$G \in \Im_2 \Longrightarrow \ \exists\, G_{ij} \in \mathcal{S} \ : \ G = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} G_{ij} \right)$**,** J_i **들은 유한집합**

(이유: $\mathcal{S}$ 가 $\Im_2$의 부분기저)

$\Longrightarrow f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} G_{ij} \right) \right) = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} f^{-1}(G_{ij}) \right)$

여기에서 $f^{-1}(G_{ij}) \in \Im_1$ **(by가정)**

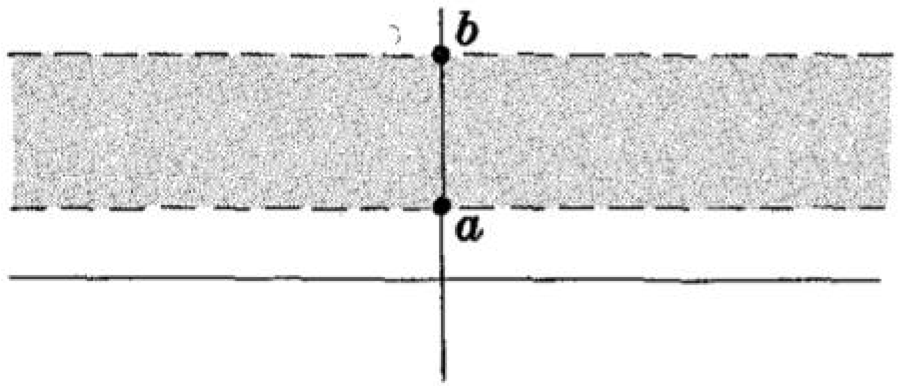
$\Longrightarrow \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J_i} f^{-1}(G_{ij}) \right) \in \Im_1$

(이유: 개집합들의 유한교집합들의 합집합은 개집합)

$\Longrightarrow f^{-1}(G) \in \Im_1 \quad \blacksquare$

[예제1.4] 평면 R^2에서 직선 R로의 사영사상은 모두 보통위상에 관하여 연속이다.

(증명) 사영사상 $\pi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R},\ \pi((x,y)) = y$를 생각하자.

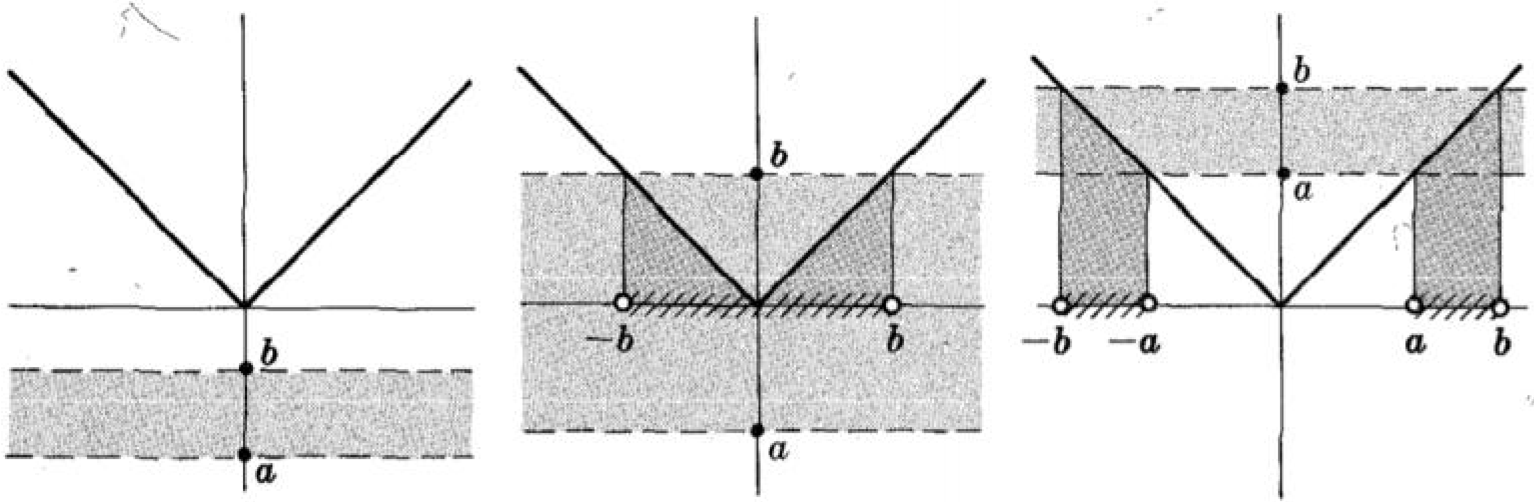


위상공간 R의 기저의 원소인 개구간 (a,b)의 역상 $\pi^{-1}((a,b))$은 위와 같이 무한히 긴 열린 띠 $(-\infty,\infty)\times(a,b)$이다. 열린 띠는 위상공간 R^2에서 개집합이므로 [명제7-1]에 의하여 π는 연속이다. ■

[예제1.5]

함수 $f(x):\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\ f(x)=|x|$ **은 연속이다. 왜냐하면 공변역** R **위의 기저원소인 개구간** $A=(a,b)$**에 대하여,**

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \varnothing & \text{if } a < b \leq 0 \\ (-b, b) & \text{if } a < 0 < b \\ (-b,-a) \cup (a,b) & \text{if } 0 \leq a < b \end{cases}$$



$f^{-1}[A] = \varnothing$ $f^{-1}[A] = (-b, b)$ $f^{-1}[A] = (-b,-a) \cup (a,b)$

모든 경우에 정의역 R **위에서 개집합이 되기 때문이다.** ■

[정리7-3]

$f:(X,\Im_1)\to(Y,\Im_2)$ 이 연속함수

$\Leftrightarrow$ (F : 폐집합 in $\Im_2$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)=$: 폐집합 in $\Im_1$)

(증명) 숙제

임의밀착성(붙어있다)

점 p가 집합 A에 **임의밀착** 한다 $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p\in\overline{A}$

[정리7-4]

함수 $f:X\to Y$ 이 연속함수

$\Leftrightarrow$ (점 p가 집합 A에 임의밀착 $\Rightarrow$ 점 $f(p)$가 집합 $f(A)$에 임의밀착)

$\Leftrightarrow$ ($p\in\overline{A}$ $\Rightarrow$ $f(p)\in\overline{f(A)}$)

$\Leftrightarrow$ ($\forall A\subset X,\ f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$)

(증명)

($\Longrightarrow$) 결론의 대우를 증명한다.

$$f(p) \notin \overline{f(A)}$$

$$\Longrightarrow \quad f(p) \in {}^{\exists} G \text{ 개집합 : } \quad G \cap f(A) = \phi$$

$$\Longrightarrow \quad p \in {}^{\exists} f^{-1}(G) \text{ 개집합}^{[1]} \text{ : } \quad f^{-1}(G) \cap A \overset{[2]}{=} \phi$$

$$\Longrightarrow \quad p \notin \overline{A}$$

여기에서 [1] f **가 연속함수**

[2] $$\begin{aligned} f^{-1}(G) \cap A &\subset f^{-1}(G) \cap f^{-1}(f(A)) \\ &= f^{-1}(G \cap f(A)) \\ &= f^{-1}(\phi) \\ &= \phi \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) F **가 폐집합 in Y**

$\Longrightarrow$ $A = f^{-1}(F)$ **에 대하여, 가정에 의해,**

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$= \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} \overset{F:\text{ 폐집합}}{=} F$$

$\Longrightarrow f(\overline{A})) \subset F$

$\Longrightarrow f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F)$ **, by 양변에** f^{-1}

$\Longrightarrow f^{-1}(f(\overline{A})) \subset A$ **, by** $A = f^{-1}(F)$

$\Longrightarrow \overline{A} \subset A$ **, by** $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A}))$

$\Longrightarrow \overline{A} = A$ **, by** $A \subset \overline{A}$

$\Longrightarrow A$**는 폐집합**

$\Longrightarrow f^{-1}(F)$ **는 폐집합, by** $A = f^{-1}(F)$

정리 7-3 에 의하여 f **는 연속함수이다.** ■

점에서 연속

함수 $f: X \to Y$ 은 **점** p**에서 연속**이다.

정의

$\Leftrightarrow$ (A가 점 $f(p)$의 근방 $\Rightarrow f^{-1}(A)$가 점 p의 근방)

[정리7-5]

함수 $f: X \to Y$ 는 연속함수이다.

$\Leftrightarrow$ 함수 $f: X \to Y$ 은 X의 모든 점에서 연속이다.

(증명)

($\Rightarrow$) $\forall p \in X$ 에 대하여,

A가 점 $f(p)$의 근방

$\Rightarrow \exists G$ 개집합 : $f(p) \in G \subset A$

$\Rightarrow f^{-1}(G)$ 개집합 : $p \in f^{-1}(G) \subset f^{-1}(A)$, (이유: f : 연속)

$\Rightarrow f^{-1}(A)$가 점 p의 근방

그러므로 함수 f는 점 p에서 연속이다.

($\Leftarrow$) G를 Y에서 개집합이라고 가정하자.

$p \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(p) \in G$: 개집합

$\Rightarrow G$는 $f(p)$의 근방, (이유: $f(p) \subset G$(개집합) $\subset G$)

$\Rightarrow f^{-1}(G)$는 p의 근방, (이유: f는 p에서 연속)

$\Rightarrow \exists A_p$ 개집합 : $p \in A_p \subset f^{-1}(G)$

$f^{-1}(G) = \bigcup_{p \in f^{-1}(G)} A_p$: 개집합들의 합집합이므로 개집합이다.

따라서 $\forall$ 개집합 $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$: 개집합 in X 이다.

즉 f는 연속함수이다. ■

점렬연속

함수 $f : X \to Y$ 은 **점** p**에서 점렬연속**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ (점렬 $< a_n > \to p \Rightarrow$ 점렬 $< f(a_n) > \to f(p)$)

[명제7-6] 모든 연속함수는 점렬연속이다.

(증명) 함수 $f: X \to Y$ **를 연속함수라고 가정하자.**

점렬 $a_n \to a$ **라고 가정하자.**

$f(a) \in G$ **개집합** $\subset Y$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(G)$ **개집합** $\subset X$ **, (이유:** f **는 연속함수)**

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow a_n \in f^{-1}(G))$ **, (이유:** $a_n \to a$**)**

$\Rightarrow f(a_n) \in G$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow f(a_n) \in G)$

그러므로 점렬 $f(a_n) \to f(a)$ **이다.** ■

주의 : 명제7-6 의 역은 성립하지 않는다.

(이유) [예제7.3]에서 실수집합위의 여가산위상공간 $(\mathrm{R}, \mathscr{T})$**에서 수렴하는**

점렬 $< a_n >$ **은 항상** $< a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n_0}, p, p, p, \cdots >$**와 같은 형식이다.**

$(\mathrm{R}, \mathscr{F})$ 에서 실수 보통위상공간으로 가는 함수

$$f:(\mathrm{R},\mathscr{F})\to(\mathrm{R},\mathcal{U}),\ f(x)=x$$

를 고려하면 점렬연속이 될 수 밖에 없다. 그런데 $f^{-1}((0,1))=(0,1)$ 인데 $(0,1)$ 은 보통위상 $\mathcal{U}$ 에서는 개집합이지만, $\mathscr{F}$ 에서는 $(0,1)^c=(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ 은 가산집합이 아니므로 개집합이 아니다. ■

열린함수(개함수)

함수 $f:X\to Y$ 은 **열린함수**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ (G가 개집합 in $X \Rightarrow f(G)$가 개집합 in Y)

닫힌함수(폐함수)

함수 $f:X\to Y$ 은 **닫힌함수**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ (G가 폐집합 in $X \Rightarrow f(G)$가 폐집합 in Y)

[참고]

함수 $f: X \to Y$ 은 연속함수이다.

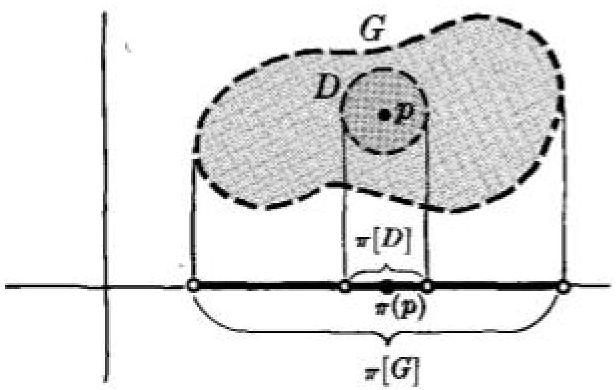
$\Leftrightarrow$ (G가 개집합 in $Y \Rightarrow f^{-1}(G)$가 개집합 in X)

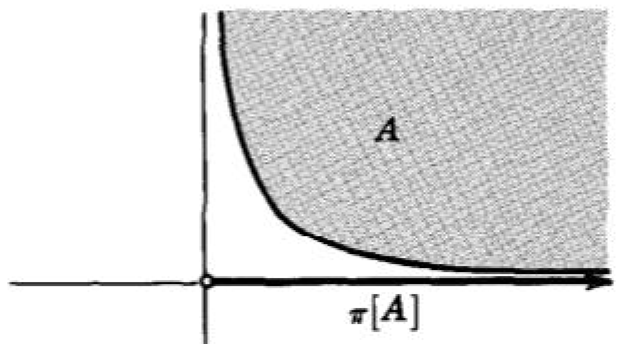
$\Leftrightarrow$ (G가 폐집합 in $Y \Rightarrow f^{-1}(G)$가 폐집합 in X)

[참고]

연속함수, 개함수, 폐함수는 모두 다르다.

[예제2.1] 사영함수 $\pi : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, $\pi((x,y)) = x$ 은 개함수, but 폐함수 아님.





(풀이) 집합 A의 여집합 A^c은 개집합이므로 A는 폐집합이다. 그런데 $\pi[A]$는 폐집합이 아니다. 그러므로 사영함수 π는 폐함수가 아니다.

위상적 함수

함수 $f: X \to Y$ 는 **위상적**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ f 는 **쌍연속**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ f 가 연속함수이고 개함수이다.

위상동형

위상공간 X와 Y 는 **위상동형** 이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ 전단사 함수 $f: X \to Y$: f 가 쌍연속

[예제3.1] 실수집합 $\mathbb{R}$ 는 구간 $(-1,1)$과 위상동형이다. 왜냐하면 함수

$f:(-1,1)\rightarrow\mathbb{R},\ \ f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x)$ 는 전단사이고,

f 와 f^{-1} 가 모두 연속이기 때문이다.

[명제7-7] "위상동형" 은 동치 관계이다.

위상적 성질 or 위상불변성

위상공간 $(X,\Im)$가 어떤 집합에 관한 성질 P를 만족할 때, $(X,\Im)$와 위상동형인 공간들도 성질 P를 같이 만족하는 경우, P를 위상적(topological)성질 또는 위상불변(topological invariant)성이라고 한다.

[예제4.1] "길이"와 "유계성"은 위상적 성질이 아니다. 왜냐하면 실수집합 $\mathbb{R}$ 는 구간 $(-1,1)$과 위상동형이기 때문이다.

[예제4.2] "코시열" 은 위상적 성질이 아니다. 왜냐하면,

$$f:(0,\infty)\rightarrow(0,\infty),\ f(x)=\frac{1}{x}$$ **는 위상동형 함수인데,**

$$<1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots>$$ **는 코시열이지만**

$$<f(1),f(\frac{1}{2}),f(\frac{1}{3}),\cdots> \ = \ <1,2,3,\ \cdots>$$**은 아니다.**

유도된(생성된)위상

$\{(Y_i,\Im_i)\mid i\in I\}$ **를 위상공간들의 족이라 하고, 어떤 집합 X 에서 정의된 함수 $f_i:X\rightarrow Y_i$ 들이 주어졌을 때, 모든 함수 f_i 를 연속으로 만드는 X 위의 위상을 만들어 보자. f_i 들을 연속으로 만들려면 최소한**

$$\mathcal{S}=\bigcup_{i\in I}\{f^{-1}(H)\mid H\in\Im_i\}$$

의 원소들은 집합 X에서 개집합이 되어야 한다. 집합 $\mathcal{S}$ 에 의하여 생성된 X위에서의 위상 $\Im$ 을 함수 f_i 들에 의한 유도된위상 또는 생성된위상 라고 한다.

[정리7-8]

(1) 모든 함수 $f_i : (X, \Im) \to (Y_i, \Im_i)$ **는 연속함수이다.**

(2) $\Im$ **는** f_i **들을 연속으로 만드는** X **위의 모든 위상들의 공통집합이다.**

(3) $\Im$ **는** f_i **들을 연속으로 만드는** X **위의 위상들중에서 가장 작다.**

(4) $\mathcal{S}$ **는 위상** $\Im$ **의 부분기저이다.**

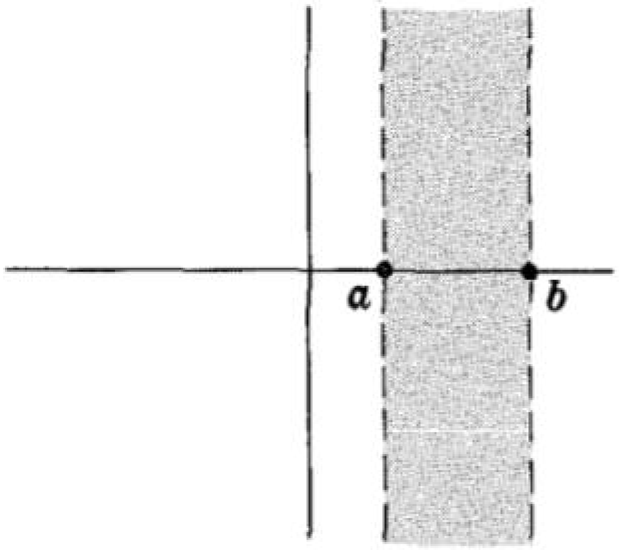
정의 부분기저

위에서 $\mathcal{S}$**를 위상** $\Im$ **의 정의부분기저라고 한다.**

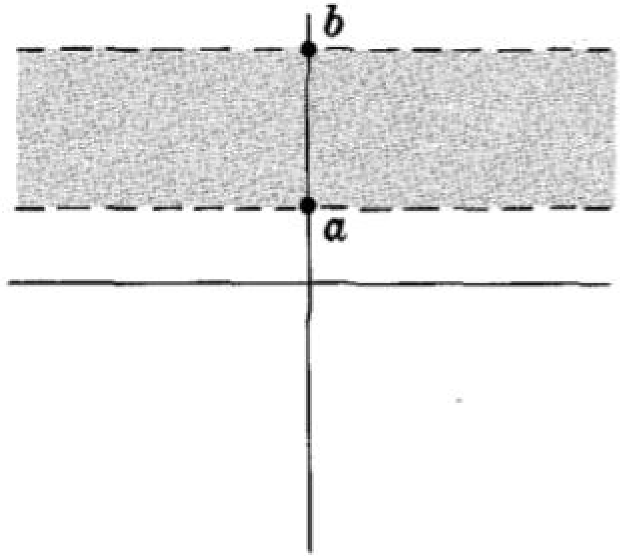
[예제5.1] π_1 **과** π_2 **를 평면** R^2**에서** R **로 가는 사영함수, 즉**

$$\pi_1((x,y)) = x,\ \pi_2((x,y)) = y$$

라고 하면 R **에서의 개구간** (a,b) **들의** π_1 **에 관한 역상은 평면** R^2 **상에서 열린 수직띠이고,** π_2 **에 관한 역상은 평면** R^2 **상에서 열린 수평띠인데, 이 열린 수직띠와 열린 수평띠들이** R^2 **상 보통위상의 부분기저를 이루므로,** R^2 **상 보통위상은 함수** π_1 **과** π_2 **를 연속으로 만드는 최소 위상이다.**



$\pi_1^{-1}[(a, b)]$



$\pi_2^{-1}[(a, b)]$

8장 거리공간과 노름공간

거리공간(metric space)

집합 X와 아래 성질을 만족하는 거리함수 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ 가 있을 때, (X, d) 를 거리공간이라고 한다.

(M1) $d(a,b) \geq 0$

(M2) $d(a,b) = d(b,a)$: 대칭성

(M3) $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$: 삼각부등식

(M4) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

[예제1.1]

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$d(a,b) = |a-b|$$

로 정의되는 함수 d 를 실직선 $\mathbb{R}$ 상의 보통거리라고 한다.

$$d : \mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$$
$$d(a,b) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}, \quad a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2)$$

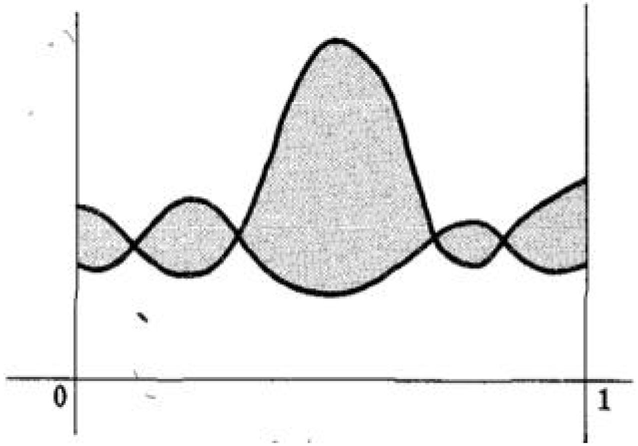
로 정의되는 함수 d 를 평면 R^2 상의 **보통거리**라고 한다.

[예제1.2] 공집합이 아닌 X에 대하여 함수,

$$\forall\, a,b \in X,\ d(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

는 X 위에 거리가 되는데, 이를 X 위의 **자명거리**(trivial metric)이라 한다.

[예제1.3]



$\mathcal{C}[0,1] = \{\, f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f :$ 연속함수 $\}$ 이고,

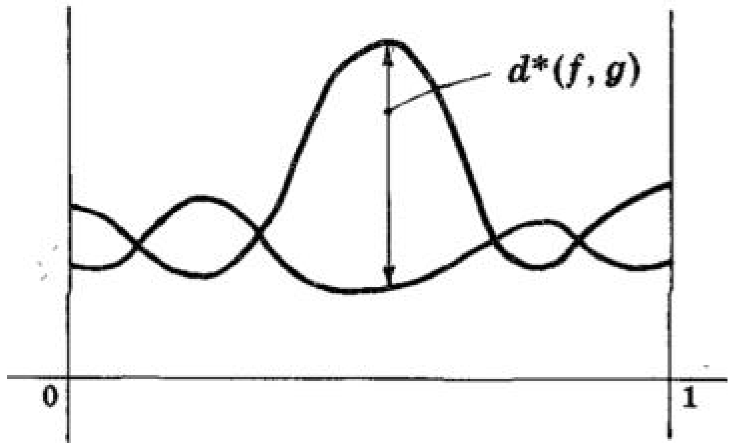
$\mathcal{C}[0,1]$ 위에서 거리 d 는 다음과 같이 정의한다.

$$d(f,g) \overset{\text{정의}}{=} \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

[예제1.4]

$\mathcal{C}[0,1] = \{ f:[0,1] \to \mathrm{R} \mid f:$ **연속함수** $\}$ **이고,**
$\mathcal{C}[0,1]$ **위에서 거리** d^* **는 다음과 같이 정의한다.**

$$d^*(f,g) \overset{\text{정의}}{=} \textbf{sup}\{ |f(x)-g(x)| \mid x \in [0,1] \}$$



[예제1.5] 평면 R^2 **위의 점** $a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2)$ **에 대하여,**

$$d_1(a,b) = |a_1-b_1| + |a_2-b_2|$$

$$d_2(a,b) = (|a_1-b_1|^2 + |a_2-b_2|^2)^{1/2}$$

$$d_p(a,b) = (|a_1-b_1|^p + |a_2-b_2|^p)^{1/p}$$

$$d_\infty(a,b) = \max(|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|)$$

로 정의된 함수들 d_1, d_2, d_p, d_∞ **은 각각 다른 거리들이다.**

점과 집합간의 거리

d를 집합 X상의 거리라고 할 때, 점 $p \in X$와 공집합이 아닌 X의 부분집합 A 사이의 거리는 다음과 같이 표기되고 정의된다.

$$d(p, A) \overset{\text{정의}}{=} \inf \{ d(p, a) \mid a \in A \}$$

집합과 집합간의 거리

공집합이 아닌 집합 A, B 사이의 거리는

$$d(A, B) \overset{\text{정의}}{=} \inf \{ d(a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

집합의 지름

공집합이 아닌 집합 A의 지름은

$$d(A) \overset{\text{정의}}{=} \sup \{ d(a, b) \mid a \in A, b \in A \}$$

유계집합과 비유계집합

지름이 유한한 집합을 유계집합,
지름이 무한한 집합을 비유계집합이라고 한다.

[예제2.2] 실수집합 $\mathbb{R}$ 에서의 구간 $A=[0,1)$, $B=(1,2]$ 에 대하여,
d 가 보통거리($d(a,b)=|a-b|$) 이면, $d(A,B)=0$ 이다.
d^* 가 자명거리이면, $d^*(A,B)=1$ 이다.

[명제8-1] A,B 가 공집합이 아닌 X 의 부분집합들이고, $p\in X$ 일 때,
(1) $d(p,A)$, $d(A,B)$, $d(A)$ 들은 음이 아닌 실수이다.
(2) $p\in A \Rightarrow d(p,A)=0$
(3) $A\cap B\neq \phi \Rightarrow d(A,B)=0$
(4) A 가 유한집합 $\Rightarrow A$ 는 유계집합
(2)~(4) 의 역은 성립하지 않는다.

특별규약

$$d(p,\phi) = \infty,\ d(A,\phi) = \infty,\ d(\phi) = -\infty$$

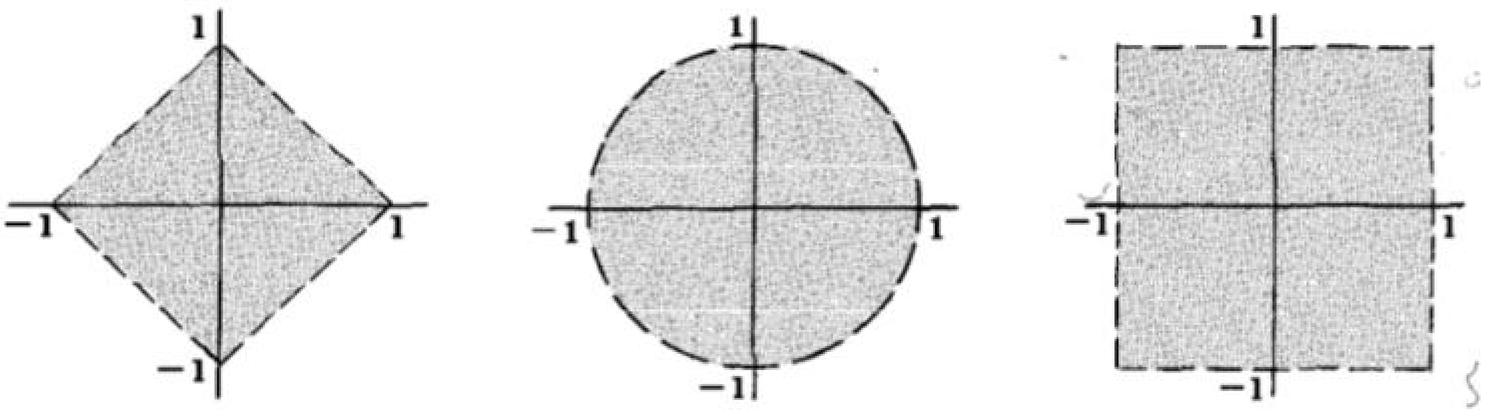
열린구

d 를 집합 X 위의 거리라고 할 때, 점 $p \in X$와 실수 $\delta > 0$ 에 대하여,

$$S(p,\delta) = \{x \mid d(p,x) < \delta\}$$

를 **열린구**라고 한다.

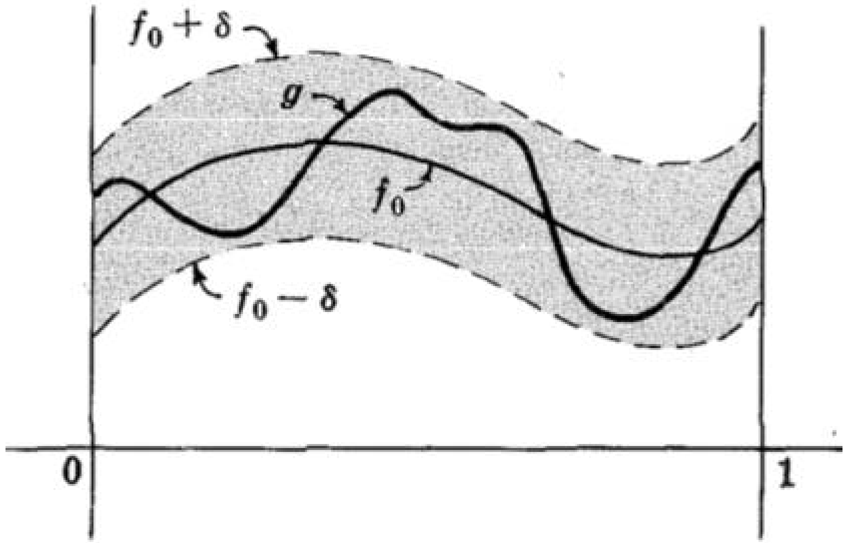
[예제3.1] 예제1.5 의 d_1, d_2, d_∞ 에 대한 반지름이 1 열린구는 각각.



[예제3.4] $\mathcal{C}[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f :$ **연속함수** $\}$ **이고,** $\mathcal{C}[0,1]$ **위의 거리**

$$d(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

에 대하여, $f_0 \in \mathcal{C}[0,1]$**를 중심으로 하는 열린구** $S(f_0, \delta)$**는 다음과 같다.**



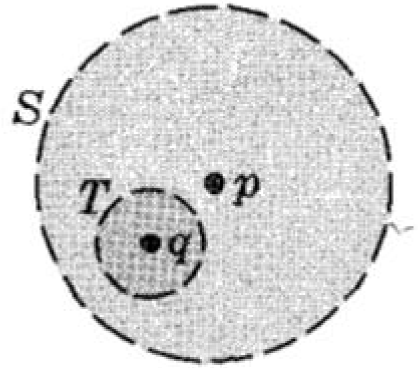
(풀이) $g \in S(f_0, \delta) \Rightarrow d(f_0, g) < \delta$

$$\Rightarrow \sup\{ |f_0(x) - g(x)| \mid x \in [0,1] \} < \delta$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1],\ |f_0(x) - g(x)| < \delta$$

[보조정리8-2] 중심이 p 이고 반지름이 δ 인 열린구 $S = S(p,\delta)$ 에 대하여,

$\forall q \in S, \exists T = S(q,\varepsilon)$ **열린구 :** $T \subset S$



(증명)

$$q \in S(p,\delta) \Rightarrow d(p,q) < \delta$$

$$\Rightarrow 0 < {}^{\exists}\varepsilon < \delta - d(p,q) \quad \text{--(1)}$$

$$x \in S(q,\varepsilon) \Rightarrow d(x,q) < \varepsilon \quad \text{--(2)}$$

$\Rightarrow d(x,p) \le d(x,q) + d(q,p)$ **by 삼각부등식**

$< \varepsilon + d(p,q)$ **by (2), d: 대칭성**

$< (\delta - d(p,q)) + d(p,q)$ **by (1)**

$= \delta$

$$\Rightarrow d(x,p) < \delta$$

$$\Rightarrow x \in S(p,\delta)$$

그러므로 $T = S(q,\varepsilon) \subset S(p,\delta) = S$ ■

[참고] $A = \bigcup_{x \in A} A_x \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists A_x : x \in A_x \subset A$

(증명)

($\Rightarrow$ **)** $x \in A \;\Rightarrow\; x \in \bigcup_{t \in A} A_t$

$\Rightarrow\; \exists A_{t_0} : x \in A_{t_0}$ **(** $\subset \bigcup_{t \in A} A_t = A$ **)**

$\Rightarrow\; \exists A_x : x \in A_x \subset A$

($\Leftarrow$ **)** $\forall x \in A, \exists A_x : x \in A_x \subset A$

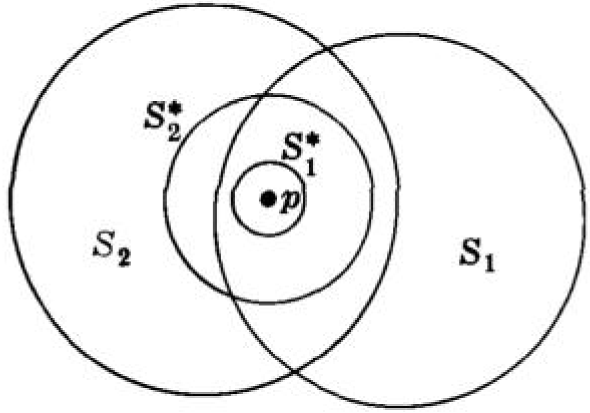
$\Rightarrow$ **(**$\forall x \in A,\; x \in \bigcup_{x \in A} A_x$ **)** $\wedge \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$

$\Rightarrow$ **(**$A \subset \bigcup_{x \in A} A_x$ **)** $\wedge \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$

$\Rightarrow\; A = \bigcup_{x \in A} A_x$

[보조정리8-3] 두 열린구의 교집합은 열린구들의 합집합으로 표시된다.

(증명) S_1 **과** S_2 **를 임의의 두 열린구라고 하자.**



$S_1 \cap S_2 = \phi$ **라면** $S_1 \cap S_2 = \phi = \bigcup_{i \in \phi} S_i$ **로 표시된다.**

$S_1 \cap S_2 \neq \phi$ **라 하자.**

$p \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow p \in S_1 \ \wedge \ p \in S_2$

$\Rightarrow \ \exists\, S(p, \varepsilon_1)$ **열린구 :** $S(p, \varepsilon_1) \subset S_1$

$\exists\, S(p, \varepsilon_2)$ **열린구 :** $S(p, \varepsilon_2) \subset S_2$ **, by 보조정리8-2**

$\Rightarrow$ **만약** $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ **이라면,** $S(p, \varepsilon_1) \subset S(p, \varepsilon_2)$ **(**$\subset S_2$**)**

그래서 $S(p, \varepsilon_1) \subset S_1 \cap S_2$.

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ **라면** $S(p, \varepsilon_2) \subset S_1 \cap S_2$

$\Rightarrow \ \exists\, S_p$ **열린구 :** $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$

그러므로 $S_1 \cap S_2 = \bigcup_{p \in S_1 \cap S_2} S_p$ **: 열린구들의 합집합이다.** ■

[정리8-4] 거리공간 (X, d) 에서 모든 열린구들의 집합은 X 위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

(증명)

정리6-1 의 기저의 자격 :

(1) $X = \bigcup_{p \in X} S(p, 1)$

(2) 보조정리8-3 에 의하여 임의의 두 열린구들의 교집합은 다른 열린구들의 합집합으로 표시될 수 있다. ■

거리위상공간

모든 거리공간은 열린구들의 족을 기저로 갖는 위상을 가진 위상공간이 된다. 이 위상을 거리위상 또는 거리에 의해 유도된 위상이라고 하고, 이 위상공간을 거리위상공간이라고 한다.

[예제4.1] 실수 집합 R 위에 정의된 거리 $d(x,y)=|x-y|$ 에 대하여, 열린구는 $(p-\varepsilon,\ p+\varepsilon)$ 는 열린구간 (a,b) 이 된다. 따라서 열린구간들을 기저로 하는 실수 집합 R 위에 보통위상은 거리 d 에 의하여 유도된 위상이다.

[예제4.2] d 를 집합 X 위의 **자명거리**라고 하자. 임의의 $p\in X$ 에 대하여 열린구 $S(p,1/2)$ 는 단일원 집합 $\{p\}$ 이므로 모든 단일원들이 개집합이 되고, 따라서 모든 집합이 개집합이 된다. 즉 자명거리가 유도하는 위상은 X 위의 **이산위상**이다.

[정리8-5] 거리공간 X위의 한 점 $p\in X$에 대하여, 열린구들의 가산족 $\{S(p,1), S(p,1/2), S(p,1/3), \cdots\}$은 p에서 국소기저를 이룬다.

(증명)

p를 포함한 임의의 개집합 G에 대하여, 열린구들이 기저를 이루므로 $\exists$ 열린구 $S_i, i\in I : G=\bigcup_{i\in I} S_i$ 이다. $p\in G$이므로 $\exists i_0 : p\in S_{i_0}$이다. 보조정리8-2 에 의하여, $\exists \varepsilon>0 : S(p,\varepsilon)\subset S_{i_0}$ 이다. 그런데 $\exists n_0 : 1/n_0<\varepsilon$ 이므로 $S(p,1/n_0)\subset S(p,\varepsilon)$ 이 되어 $S(p,1/n_0)\subset G$ 이 된다. 따라서 가산족 $\{S(p,1), S(p,1/2), S(p,1/3), \cdots\}$은 p에서 국소기저를 이룬다. ■

Sup (최소상계, 상한, 윗경계) in 순서집합

a는 집합 S의 **상계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in S,\ x \le a$

a는 집합 S의 **최소상계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ① a는 S의 상계

($a = \mathrm{Sup} S$) ② (t는 S의 상계 $\Rightarrow$ $a \le t$)

Inf (최대하계, 하한, 아랫경계) in 순서집합

a는 집합 S의 **하계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in S,\ a \le x$

a는 집합 S의 **최대하계** $\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ① a는 S의 하계

($a = \mathrm{Inf} S$) ② (t는 S의 하계 $\Rightarrow$ $t \le a$)

명제] (1) $(t$ **는** S **의상계** $\Longrightarrow a \leq t) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : a - \varepsilon < x)$

(2) $(t$ **는** S **의하계** $\Longrightarrow t \leq a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x < a + \varepsilon)$

(증명) (1)

$(($ t **는** S **의 상계**$) \Longrightarrow a \leq t)$

$\Leftrightarrow (($ t **는** S **의 상계가 아니다**$) \vee a \leq t)$

$\Leftrightarrow ((\exists x \in S, t < x) \vee a - t \leq 0)$

$\Leftrightarrow (a - t \leq 0 \vee (\exists x \in S, t < x))$

$\overset{\varepsilon = a - t}{\Leftrightarrow} (\varepsilon \leq 0 \vee (\exists x \in S, a - \varepsilon < x))$

$\Leftrightarrow (\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists x \in S : a - \varepsilon < x)$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 , \exists x \in S : a - \varepsilon < x)$

[정리8-6] 거리공간 X의 부분집합 A의 폐포는 A에서 거리 0(영)인 점들의 집합이다.

(증명)

$d(p,A)=0$

$\Leftrightarrow$ **Inf** $\{d(p,x)\,|\,x\in A\} = 0$

$\Leftrightarrow$ 0은 $S=\{d(p,x)\,|\,x\in A\}$ **의 하계(이것은 항상 참)이고**

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,d(p,x)\in S:\ d(p,x)<0+\varepsilon$

$\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,x\in A: d(p,x)<0+\varepsilon$

$\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,x\in A: x\in S(p,\varepsilon)$

$\Leftrightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\ S(p,\varepsilon)\cap A\neq\phi$

$\Leftrightarrow\ p\in{}^{\forall}G$ **개집합,** $G\cap A\neq\phi$

$\Leftrightarrow\ p\in\overline{A}$ ■

[따름정리8-7] 거리공간 X의 모든 유한집합은 폐집합이다.

(증명)

$$\forall p \in X, \quad \overline{\{p\}} = \{x \mid d(x, \{p\}) = 0\}$$ **by 정리8-6**

$$= \{x \mid d(x, p) = 0\}$$

$$= \{p\}$$ **by 거리의 성질**

그러므로 $\overline{\{p\}} = \{p\}$ **--- (1)**

A**가 유한집합이면,** $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$

$$= \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$$ **by (1)**

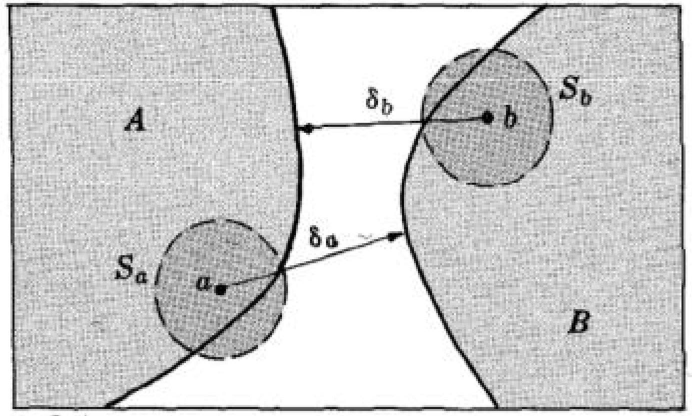
그러므로 A**는 폐집합들의 유한 합집합이다.**

따라서 A**는 폐집합이다.**

[정리8-8] **거리공간에서** A, B **는** $A \cap B = \phi$ **인 폐집합이면,**

$$\exists\, G, H \text{ 개집합 : } (A \subset G) \wedge (B \subset H) \wedge (G \cap H = \phi)$$

(증명)



$a \in A \Rightarrow a \notin B$ **by** ($A \cap B = \phi$)

$\Rightarrow d(a, \overline{B}) = \delta_a > 0$ **by 정리8-6**

$\Rightarrow d(a, B) = \delta_a > 0$ **by** $\overline{B} = B$

$S_a = S(a, \delta_a/3)$ **라 하고,**

$G = \bigcup_{a \in A} S_a$ **라 하면,** G**는 개집합이고,** $A \subset G$ **이다.**

비슷하게 $b \in B$ **에 대하여** $S_b = S(b, \delta_b/3)$**,** $H = \bigcup_{b \in B} S_b$ **라 하면,**

H**는 개집합이고** $B \subset H$ **이다. 이제** $G \cap H = \phi$**임을 보이자.**

$p \in G \cap H \Rightarrow \exists\, a_0 \in A, \exists\, b_0 \in B : (p \in S_{a_0}, p \in S_{b_0})$

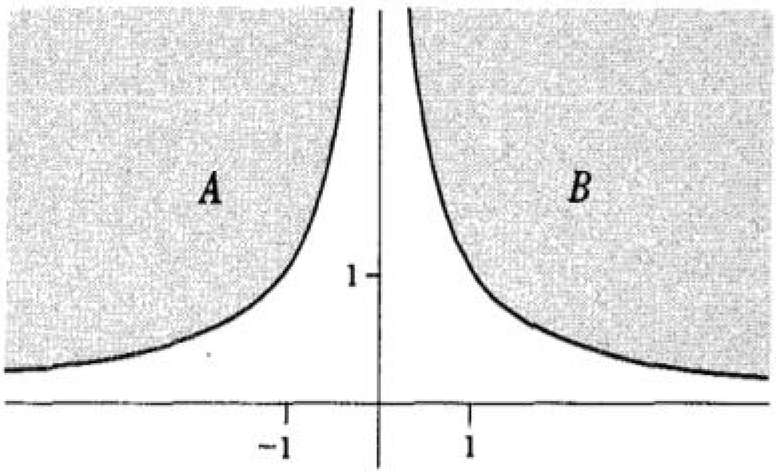
$$\Rightarrow (\ d(a_0, p) < \delta_{a_0}/3,\ d(b_0, p) < \delta_{b_0}/3\ )$$

$d(a_0,b_0) = \varepsilon > 0$ **이라면,**

$$\begin{aligned} \varepsilon = d(a_0,b_0) &\le d(a_0,p) + d(p,b_0) \\ &< \delta_{a_0}/3 + \delta_{b_0}/3 \\ &\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= 2/3\,\varepsilon \end{aligned}$$

그러므로 $\varepsilon < 2/3\varepsilon$!! **따라서** $G \cap H = \phi$ **이어야 한다.** ■

[예제5.1] A, B**는 폐집합이고** $A \cap B = \phi$ **이지만** $d(A,B) = 0$ **이다.**

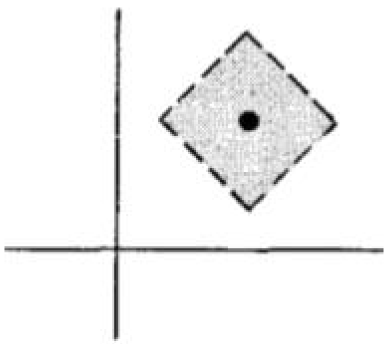


동치거리

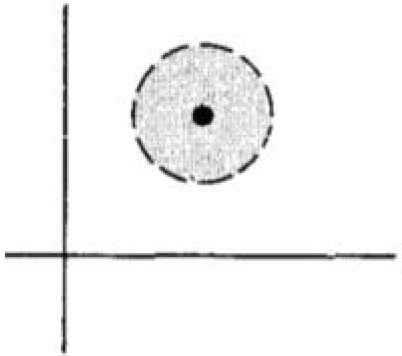
집합 X 위의 두 거리 d 와 d^* 가 같은 위상을 유도할 때, d 와 d^* 는 **동치**(equivalent) 라고 한다.

[예제6.1] 평면 R^2 에 정의된 다음 거리들은 모두 **보통위상**을 유도하므로 서로 동치이다.

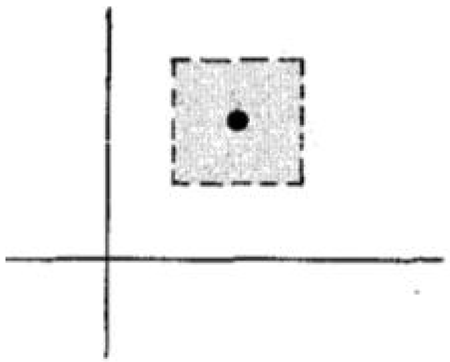
$$d_1(a,b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$
$$d_2(a,b) = (|a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2)^{1/2}$$
$$d_p(a,b) = (|a_1 - b_1|^p + |a_2 - b_2|^p)^{1/p}$$
$$d_\infty(a,b) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|)$$



$S_{d_1}(p, \delta)$



$S_{d_2}(p, \delta)$



$S_{d_\infty}(p, \delta)$

[예제6.2] 공집합이 아닌 집합 X 에 정의된 다음 두 거리 d_1, d_2 는 모두 이산위상을 유도하므로 서로 동치이다.

$$\forall\, a,b \in X,\ d_1(a,b) \overset{정의}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

$$\forall\, a,b \in X,\ d_2(a,b) \overset{정의}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 2, & a \neq b \end{cases}$$

[명제8-9] "d 와 d^* 는 동치이다"라는 관계는 일종의 동치관계이다.

거리동형공간

거리공간 (X,d) 와 (Y,e) 사이에 전단사함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 존재하고, 거리가 보존되면, 즉,

$$\forall\, a,b \in X,\ d(a,b) = e(f(a), f(b))$$

이면 (X,d) 는 (Y,e) 와 거리동형이라고 한다.

[정리8-10] 두 거리공간이 거리동형이면, 또한 위상동형이다.

역은 성립하지 않는데, 반례를 들자면

[예제8.1] 같은 기수를 갖는 집합 X, Y 에 대하여, 두 거리공간 (X,d), (Y,e) 의 두 거리 d_1, d_2 는 모두 이산위상을 유도하여 위상동형이지만, 거리의 크기가 다르기 때문에 거리동형이 아니다.

$$\forall\, a,b \in X,\ d_1(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

$$\forall\, a,b \in Y,\ d_2(a,b) \overset{\text{정의}}{=} \begin{cases} 0, & a=b \\ 2, & a \neq b \end{cases}$$

유클리드 공간

실수집합 R 의 m 개의 적집합 R^m 위에 정의 되는 거리,

$$d(a,b)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\cdots+(a_m-b_m)^2},\quad {}^\forall a,b\in\mathrm{R}^m$$

를 유클리드 거리(Euclidean metric)이라고 한다. 또한 거리공간 (R^m,d) 을 m 차원 유클리드공간이라고 한다.

[정리 8-11] m 차원 유클리드공간은 거리공간이다.

힐버트공간

집합 $\mathrm{R}^\infty=\left\{(a_1,a_2,\cdots)\mid a_i\in\mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty\right\}$ 위에 정의된 함수

$$d(a,b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$$

은 거리가 되고, $\mathrm{H} = (\mathrm{R}^{\infty}, d)$ 를 **힐버트공간(Hilbert Space)** 또는 l_2**-공간** (l_2-space) 이라고 한다.

[정리8-12] 힐버트공간 H 은 거리공간이다.

[예제9.2] 힐버트공간의 부분공간

$$\mathrm{H}_m = \{(a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, 0, \cdots) \in \mathrm{H} \mid a_i \in \mathrm{R}\}$$

은 m 차원 유클리드공간 R^m 과

$$f : \mathrm{H}_m \rightarrow \mathrm{R}^m$$

$$f((a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, 0, \cdots)) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

로서 거리동형이고, 따라서 위상동형이다.

[예제 9.3] $p_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{3k} \cdots\ )$ **여기에서** $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ \text{ if } \ i \neq j \\ 1 \ \text{ if } \ i = j \end{cases}$

일 때 힐버트공간 내의 점렬 $< p_n >$ **을 생각하자.**

$$p_1 = (1,0,0,0,\ \cdots\ )$$

$$p_2 = (0,1,0,0,\ \cdots\ )$$

$$p_3 = (0,0,1,0,\ \cdots\ )$$

$$\vdots$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

$$\mathbf{0} = (0,0,0,0,\ \cdots\ )$$

$\forall n \in \mathrm{N}$, **점렬** $< p_k >$**의 각 성분공간으로의 사영** $< \pi_n(p_k) >$ **은** 0 **으로 수렴하지만,** $\forall k \in \mathrm{N}$, $d(p_k, \mathbf{0}) = 1$ **이므로 점렬** $< p_k >$**은** 0 **으로 수렴하지 않는다.**

[예제9.4] $\mathrm{H}^* = \left\{(0, a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\right\}$ **로 정의될 때 함수**

$$f : \mathrm{H} \to \mathrm{H}^*$$
$$f((a_1, a_2, \cdots)) = (0, a_1, a_2, \cdots)$$

에 의해 힐버트공간 H 는 그 자신의 진부분집합 H^* 와 거리동형이다.

거리공간에서 수렴

거리공간 (X, d) 의 점렬 $< a_1, a_2, \cdots >$ 은 $b \in X$ 로 수렴한다고한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(a_n, b) < \varepsilon)$$

거리공간사이의 연속함수

거리공간 사이의 함수 $f : (X, d) \to (Y, d^*)$ 은 $p \in X$ 에서 연속이라 한다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\ d(p, x) < \delta \Rightarrow d^*(f(p), f(x)) < \varepsilon\ )$$

노름공간

선형공간(벡터공간) X**에 대하여 다음을 만족하는 함수** $\| \| : X \to \mathrm{R}$ **가 있을 때,** $(X, \| \|)$ **을 노름공간(Normed Space)이라고 한다.**

$\forall k \in \mathrm{R}$, $\forall v, w, \in X$ **에 대하여,**

(N1) $\|v\| \geq 0$

(N2) $\|kv\| = |k| \, \|v\|$

(N3) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(N4) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

[정리8-13] **노름공간** $(X, \| \ \|)$**은 거리공간이다.**

(설명)

$d(x,y) = \|x-y\|$ **로 정의된 함수** d**가 거리가 된다.**

[예제10.1] 실수의 적집합 R^m 은 덧셈과 스칼라곱에

$$<a_1,a_2,\ \cdots\ ,a_m>+<b_1,b_2,\ \cdots\ ,b_m>=<a_1+b_1,a_2+b_2,\ \cdots\ ,a_m+b_m>$$

$$k<a_1,a_2,\ \cdots\ ,a_m>\ =<ka_1,ka_2,\ \cdots\ ,ka_m>$$

대하여 선형공간이 된다.

유클리드 노름

$$\|<a_1,a_2,\ \cdots\ ,a_m>\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ \cdots\ +a_m^2}$$

$p-$ **노름**

$$\|<a_1,a_2,\ \cdots\ ,a_m>\|_p=(|a_1|^p+|a_2|^p+\ \cdots\ +|a_m|^p)^{1/p}$$

∞ **노름 (sup 노름)**

$$\|<a_1,a_2,\ \cdots\ ,a_m>\|_\infty=\max(|a_1|,a_2|,\ \cdots\ |a_m|)$$

[예제10.3] **선형공간** $\mathcal{C}[0,1] = \{\, f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f$ **: 연속함수** $\}$ **에서**

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

로 정의된 함수 $\|\ \|$**는 일종의 노름이 된다.**

(증명)

[N1] $\|f\| \geq 0$ **임은 명백하다.**

[N2] $$\|cf\| = \int_0^1 |c\, f(x)|\, dx$$

$$= |c| \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

$$= |c|\ \|f\|$$

[N3] $$\|f+g\| = \int_0^1 |f(x) + g(x)|\, dx$$

$$\le \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)dx$$

$$= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

[N4]

$f = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f(x)|dx = 0$ **(이유 : f 가 연속함수)**

$$\Leftrightarrow \|f\| = 0$$

[예제10.4] 선형공간 $\mathcal{C}[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathrm{R} \mid f$: 연속함수 $\}$ 에서

$$\|f\|_\infty = \textbf{sup}\{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \}$$

로 정의된 함수 $\| \|_\infty$ 는 일종의 노름이 된다.

[예제10.6] 선형공간 $\mathrm{R}^{\infty} = \left\{ (a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathrm{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \right\}$ **에서**

$$\| < a_n > \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2}$$

로 정의된 함수 $\| \ \|$**는 일종의 노름이 된다.**

제9장 가산성

가산집합(from 집합론)

집합 A 는 가산집합이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **집합 A 로부터 자연수집합 $\mathbb{N}$ 으로 가는 1-1 함수(단사함수)가 존재한다.**

[예제]

(1) 모든 유한집합은 가산집합이다.

(2) 모든 수열의 치역은 가산집합이다.

(3) 정수집합은 가산집합이다.

(4) 유리수집합은 가산집합이다.

(5) 실수구간 $(0,1)$ 은 비가산집합이다.

(6) 실수집합은 비가산집합이다.

가산족 (from 집합론)

집합족 $\mathscr{B}$ 는 가산족이다

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ∃ **가산집합** I **:** $\mathscr{B} = \{A_i \mid i \in I\}$

제1가산공간

위상공간 X는 제1가산공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in X, \exists\ \mathscr{B}_p$**: 가산국소기저 of** p

제2가산공간

위상공간 $(X, \mathfrak{I})$는 제2가산공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ ∃ $\mathscr{B}$ **: 가산기저 of 위상** $\mathfrak{I}$

[예제1.1] 모든 거리공간은 제1가산공간이다.

(풀이) 거리공간의 한 점 p에 대하여 중심을 p에 둔 열린구들의 집합 $\left\{S(p,1), S(p,\frac{1}{2}), S(p,\frac{1}{3}), \cdots\right\}$은 가산집합이고, 또 점 p의 국소기저가 된다.

[예제1.2] 모든 이산공간은 제1가산공간이다.

(풀이) 이산공간 X의 모든 집합은 개집합이므로, 임의의 한 점 p 에 대하여, 한 점 집합 $\{p\}$는 개집합이다. 점 p를 포함한 임의의 개집합 G은 점 p를 포함하므로 집합 $\mathscr{B}_p = \{\{p\}\}$는 점 p의 국소기저가 된다.

집합 $\mathscr{B}_p$는 유한집합이므로 가산집합이 된다. 즉 이산공간 X의 가산국소기저가 존재하므로 X는 제1가산공간이다.

[문제2, p249]

점 p**의 가산국소기저** $\mathcal{C}_p = \{G_1, G_2, G_{3,} \cdots\}$**가 존재하면**

점 p**의 축소국소기저** $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$**: (**$\forall n \in \mathrm{N}, B_n \supset B_{n+1}$**)**

가 존재한다.

(증명)

$$B_1 = G_1$$

$$B_2 = G_1 \cap G_2$$

$$B_3 = G_1 \cap G_2 \cap G_3$$

$$\cdots$$

로 놓으면 당연히 $\forall n \in \mathrm{N}, B_n \supset B_{n+1}$ **이 되고,**

$p \in {}^{\forall} G$ **개집합,** $\exists n_0 \in \mathrm{N}, p \in G_{n_0} \subset G$

이므로 $\exists n_0 \in \mathrm{N}, p \in B_{n_0} \subset G_{n_0} \subset G$ **이다.**

그러므로 $\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$**는 축소국소기저이다.** ■

[문제3, p249]

$\mathscr{B}_p = \{B_1, B_2, B_{3,} \cdots\}$가 점 p의 축소국소기저이고, $\forall n \in \mathrm{N}, a_n \in B_n$ 이면 $a_n \to p$ 이다.

(증명)

$p \in {}^{\forall} G$ 개집합, $\mathscr{B}_p$이 국소기저이므로,

$\exists n_0 \in \mathrm{N}, p \in B_{n_0} \subset G$ 이다.

그런데 $a_{n_0} \in B_{n_0}$ 이고, 축소국소기저이므로 ($n \ge n_0 \Rightarrow B_n \subset B_{n_0}$)

이다, 그런데 $a_n \in B_n$ 이므로 ($n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in B_{n_0}$) 이다.

여기서 $B_{n_0} \subset G$ 이므로 ($n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in G$) 이다.

따라서 $p \in {}^{\forall} G$ 개집합, ($n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in G$) 이다.

즉 $a_n \to p$ 이다. ■

[정리 9.1] X가 제1가산 공간인 함수 $f:X\to Y$ 에 대하여,

$$f \text{ 가 점 } p\text{에서 연속} \iff f \text{ 가 점 } p\text{에서 점열연속}$$

(증명)

참고 : 함수 $f:X\to Y$ 은 점 p에서 점열연속이다.

$\overset{\text{정의}}{\iff}$ (점열$a_n\to a \Rightarrow$ 점열$f(a_n)\to f(a)$)

($\Longrightarrow$)

1학기때 "[명제7.6] 모든 연속함수는 점열연속이다."에서 증명함.

($\Longleftarrow$)

$\mathscr{B}_p=\{B_1,B_2,B_3,\cdots\}$를 점 p의 축소국소기저($B_n\supset B_{n+1}$)라 하자.

만약 f 가 점 p에서 연속이 아니라고 가정하면,

$\exists H$ 개집합 of Y : (1) $f(p)\in H$

(2) $\forall n\in \mathbb{N}$, $p\in B_n \not\subset f^{-1}[H]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}$, $\exists a_n \in B_n$: $a_n \notin f^{-1}[H]$

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}$, $\exists a_n \in B_n$: $f(a_n) \notin H$

$\mathscr{B}_p$ 는 축소국소기저이므로, by (#3 p249)에 의하여 $a_n \to p$ 이다. --[1]

그런데 $f(p) \in H$: 개집합, $\forall n \in \mathrm{N}$, $f(a_n) \notin H$ 이므로

$f(a_n) \not\to f(p)$ 이다. --[2]

그러므로 [1],[2]에 의하여 점열연속이 아니다. ■

[예제2.1] 보통위상을 가진 실수공간 $(\mathrm{R}, \mathfrak{U})$ 은 제2가산공간이다.

(풀이) $\mathscr{B} = \{(q,r) \mid q,r \in \mathrm{Q}\} \approx \mathrm{Q} \times \mathrm{Q} \approx \mathrm{N}$ 이므로 $\mathscr{B}$ 는 가산족이다.

$\mathscr{B}$ 가 실수공간의 기저가 됨을 보이자. $^\forall G \in \mathfrak{U}$, 개구간들이

$\mathfrak{U}$ 의 기저이므로, $^\forall x \in G$, $\exists$ 개구간 (a,b): $x \in (a,b) \subset G$

여기서 $\exists q_x, r_x \in \mathrm{Q}$: $x \in (q_x, r_x) \subset (a,b) \subset G$ 임을 알 수 있다.

따라서 $G = \cup_{x \in G} (q_x, r_x)$, 여기서 $(q_x, r_x) \in \mathscr{B}$ 이다. ■

[예제2.2] 이산위상을 가진 실수집합 위에 위상공간 $(\mathrm{R},\mathcal{D})$의 기저가 되기 위해서는 단일원 집합을 모두 포함해야 한다. 따라서 그 기저는 가산집합이 아니다. 그러므로 $(\mathrm{R},\mathcal{D})$는 제2가산공간이 안된다.

[명제9.2] 모든 제2가산공간은 제1가산공간이 된다.

(증명)

$\mathcal{B}$를 제2가산공간 X의 가산기저라고 하고, $p\in X$라고 하자.

$\mathcal{B}_p=\{B\in\mathcal{B}\mid p\in B\}$는 $\mathcal{B}$의 부분집합이므로 가산집합이 된다.

$p\in{}^{\forall}G$ 개집합에 대하여,

$\mathcal{B}$가 기저이므로, $\exists B\in\mathcal{B}:p\in B\subset G$ 이다.

따라서 $B\in\mathcal{B}_p$이다. 그러므로 $\mathcal{B}_p$는 p의 국소기저가 된다.

따라서 X는 제1가산공간이 된다. ■

[참고] 예제1.2와 예제2.2.에 의하여 위 [명제9-2]의 역은 성립하지 않는다.

개피복과 부분피복

1) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **피복**이다.

$$\Leftrightarrow \; A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

2) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **개피복**이다.

$$\Leftrightarrow \; A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \;\; \wedge \;\; (\forall i \in I,\; A_i : \text{개집합})$$

3) $\mathcal{C}$는 $\mathcal{G}$의 **부분피복**이다.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$와 $\mathcal{G}$ 모두 어떤 집합의 피복이고, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ 이다.

[정리9.3] (by 린델레프)

제2가산공간에 있는 어떤 집합의 개피복은 가산 부분피복을 갖는다.

(증명)

$\mathscr{B}$를 제2가산공간 X의 가산기저라고 하자.

$\mathcal{G}$: A의 개피복

$\Rightarrow A \subset \cup\{G \mid G \in \mathcal{G}\}$ with G: 개집합

$\Rightarrow \forall p \in A,\ p \in {}^{\exists}$개집합 $G_p \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow \forall p \in A,\ \exists B_p \in \mathscr{B} : p \in B_p \subset G_p$, since $\mathscr{B}$가 X의 위상의 기저

$\Rightarrow A \subset \cup\{B_p \mid p \in A\} \subset \mathscr{B}$ where $\mathscr{B}$: 가산집합

$\Rightarrow A \subset \cup\{B_p \mid p \in A\} = \cup\left\{B_{p_n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$ since $\{B_p \mid p \in A\}$:가산집합

$\Rightarrow A \subset \cup\{B_p \mid p \in A\} = \cup\left\{B_{p_n} \mid n \in \mathrm{N}\right\} \subset \cup\left\{G_{p_n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$

$\Rightarrow \left\{G_{p_n} \mid n \in \mathrm{N}\right\}$는 A의 가산 피복이면서, $\mathcal{G}$의 부분집합 ■

[정리9.4] by 린델레프

제2가산공간의 모든 기저의 가산 부분집합인 기저를 만들 수 있다.

(증명)

X**의 가산기저를** $\mathscr{B}=\{B_n \mid n \in \mathrm{N}\}$**라고 하자.**

$\mathcal{G}$ **:** X**의 기저**

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}, \exists \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$ **:** $\cup\{A \mid A \in \mathcal{G}_n\} = B_n$ **,since** B_n**:개집합,** $\mathcal{G}$**:기저**

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}, \exists \mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$ **:** $\mathcal{G}_n$**은** B_n**의 개피복**

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N}, \exists$ **가산집합** $\mathcal{G}_n^* \subset \mathcal{G}_n$ **:** $\mathcal{G}_n^*$**은** B_n**의 개피복, by [정리9-3]**

$\Rightarrow \ \forall n \in \mathrm{N},\ \ B_n \subset \cup\{A|A \in \mathcal{G}_n^*\}$ **(**$\subset \cup\{A|A \in \mathcal{G}_n\} = B_n$**)**

$\Rightarrow \ \forall n \in \mathrm{N},\ \ B_n = \cup\{A|A \in \mathcal{G}_n^*\}$

$\Rightarrow \ \ \mathcal{G}^* = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \mathcal{G}_n^*$ **도** X**의 기저, since** $\mathscr{B}=\{B_n \mid n \in \mathrm{N}\}$**가** X**의 기저.**

여기서 $\mathcal{G}^*$**는 가산집합** $\mathcal{G}_n^*$**들의 가산개의 합집합이므로 가산집합.** ■

가분공간

위상공간 X는 가분공간 (또는 분리가능공간)이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$$ **X가 가산 조밀부분집합을 포함한다.**

$\Leftrightarrow$ $\exists$ **가산집합** A : $\overline{A} = X$

[예제 3.1] 보통위상을 갖는 실수공간 $\mathbb{R}$은 유리수집합 $\mathbb{Q}$이 가산이고, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ 이므로 $\mathbb{R}$은 가분공간이다.

[예제 3.2] 이산위상 $\mathcal{D}$을 갖는 실수집합 $\mathbb{R}$ 위의 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$에서 모든 집합이 개집합임과 동시에 폐집합이라서, 모든 부분집합 A 대하여 $\overline{A} = A$ 이다. 그러므로 A가 조밀부분집합, 즉 $\overline{A} = \mathbb{R}$ 이라면 $A = \overline{A} = \mathbb{R}$이 되어 $A = \mathbb{R}$이다. $\mathbb{R}$은 비가산이므로 A도 비가산이고, 따라서 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$는 가분공간이 될 수 없다.

[명제 9.5] 모든 제2가산공간은 가분공간이다.

(증명)

X**가 가산기저** $\mathscr{B}=\{B_n \mid n\in\mathrm{N}\}$ **(**$B_n\neq\phi$**)를 갖는다고 하자. 그럼** $\forall\, n\in\mathrm{N},\ \ \exists\, b_n\in B_n$ **이다. 여기서** $B=\{b_n \mid n\in\mathrm{N}\}$ **는 가산집합이다.** $\overline{B}=X$ **임을 보이자. 우선** $B^c\subset B'$**을 보이기 위하여** $p\in B^c$ **라고 하자.** $p\in{}^\forall G$**:개집합,** $\mathscr{B}$**이 기저이므로** $\exists\, B_{n_p}\ :\ p\in B_{n_p}\subset G$ **이다.** $n_p\in\mathrm{N}$ **이므로** $b_{n_p}\in B$**이지만** $p\in B^c$ **이므로** $b_{n_p}\neq p$ **이다. 또한** $b_{n_p}\in B_{n_p}$ **이므로** $b_{n_p}\in((G\setminus\{p\})\cap B)\neq\phi$ **이다. 따라서** $p\in B'$ **이다. 그러므로** $B^c\subset B' \Rightarrow\ B\cup B^c\subset B\cup B'$

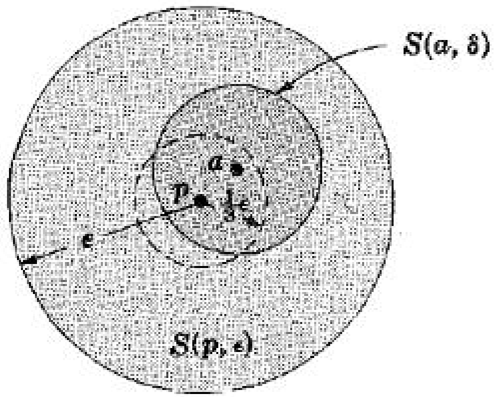
$$\Rightarrow X=B\cup B^c\subset B\cup B'=\overline{B}$$

$$\Rightarrow X=\overline{B}$$ **(이유 :** $\overline{B}\subset X$**)**

결국 B**는** X**의 가산인 조밀부분집합이다. ■**

[문제 15, p253] 거리공간 X**에서의 열린구** $S(p,\varepsilon)$ **안의 점** a**에 대하여** $d(p,a) < \frac{\varepsilon}{3}$ **이고,** $\frac{\varepsilon}{3} < \delta < \frac{2\varepsilon}{3}$**이면,** $p \in S(a,\delta) \subset S(p,\varepsilon)$**이다.**

(증명)



1) $d(p,a) < \frac{\varepsilon}{3} < \delta$ **이므로** $p \in S(a,\delta)$ **이다.**

2) $x \in S(a,\delta) \Rightarrow d(a,x) < \delta$

$$\Rightarrow d(p,x) \le d(p,a) + d(a,x)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow x \in S(p,\varepsilon)$$

따라서 $S(a,\delta) \subset S(p,\varepsilon)$ ■

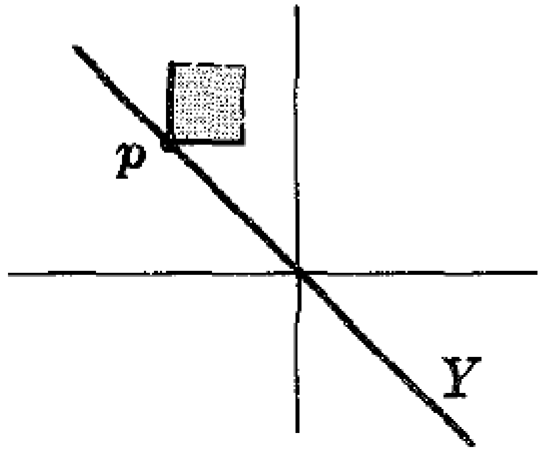
[정리 9.6] 거리공간이고 가분공간이면 제2가산공간이 된다.

(증명)

X**가 가분공간이면** $\exists$ **가산집합** $A \subset X$: $\overline{A} = X$ **이다. 그러므로** $\mathscr{B} = \{S(a,\delta) \mid a \in A, \delta \in \mathbb{Q}\}$ **는 가산집합이다. 여기서** $\mathscr{B}$**가 기저가 됨을 보이자.** $\forall p \in {}^{\forall}G$ **개집합에 대하여,** X**는 거리공간이므로,** $\exists S(p,\varepsilon) \subset G$ **이다.** $\overline{A} = X$ **이므로** $\exists a_p \in A$: $d(a_p, p) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\dfrac{\varepsilon}{3} < \delta_p < \dfrac{2\varepsilon}{3}$ **이 되는 유리수** δ_p**를 잡으면, [문제 15, p253]에 의해,** $p \in S(a_p, \delta_p) \subset S(p,\varepsilon)$ **이 된다.** $S(a_p,\delta_p) \in \mathscr{B}$ **이고** $S(p,\varepsilon) \subset G$ **이므로,** $\forall p \in {}^{\forall}G$ **,** $\exists S(a_p,\delta_p) \in \mathscr{B}$ **:** $p \in S(a_p,\delta_p) \subset G$ **이다. 그러므로** $\mathscr{B}$**는 기저가 된다. 즉 가산기저이다.** ■

유전적 성질

위상공간 X가 성질 P를 가질 때, 그 부분공간도 모두 성질 P를 가지면 성질 P를 유전적 성질이라고 한다.



[예제] 제1가산, 제2가산은 유전적 성질이다.
하지만, 가분공간의 부분공간이 반드시 가분이 되는 것은 아니다.
즉 가분성은 유전적 성질이 아니다.

[문제 13-14, p252]

$\Im$를 직사각형 $[a,b)\times[c,d)$들에 의해 생성된 평면 $\mathbb{R}^2$상의 위상이라 하자. 모든 직사각형이 유리수 점 (p,q)를 포함하기 때문에, $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$는 $\mathbb{R}^2$에서 조밀하다. A는 가산집합이므로 $(\mathbb{R}^2,\Im)$는 가분공간이다. 그런데 직선 $Y=\{(x,y)\,|\,x+y=0\}$는 이산위상이 되므로 가분공간이 아니다.

[참고] 가분성은 위상적 성질이다.

(증명)

X, Y **위상동형**

$\Rightarrow \exists$ 전단사함수 $f: X \rightarrow Y$

X **: 가분공간**

$\Rightarrow \exists$ 가산집합 $A \subset X$: $\overline{A} = X$

$\Rightarrow f(\overline{A}) = f(X)$

$\Rightarrow f(\overline{A}) = Y$

$\Rightarrow Y = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ **by 연속함수의 임의밀착성.**

$\Rightarrow Y = \overline{f(A)}$

$\Rightarrow Y$ **: 가분공간 since** $f(A) \cong A$ **: 가산집합**

그러므로 가분성은 위상적 성질이다. ■

제10장 분리공리

T_1공간

위상공간 X는 T_1공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall a \neq {}^\forall b \in X$, $\exists$ **개집합** G, H **:** $a \in G,\ b \in H,\ a \notin H,\ b \notin G$

T_2공간(=하우스도르프 공간)(Hausdorff Space)

위상공간 X는 T_2공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall a \neq {}^\forall b \in X$ **,** $\exists$ **개집합** G, H **:** $a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$

정칙공간

위상공간 X는 정칙공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $p \notin {}^\forall F$ **폐집합,** $\exists$ **개집합** G, H **: (** $p \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$ **)**

T_3공간

위상공간 X는 T_3공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 위상공간 X가 정칙공간이고, 또한 T_1공간이다.

정규공간

위상공간 X는 정규공간이다.

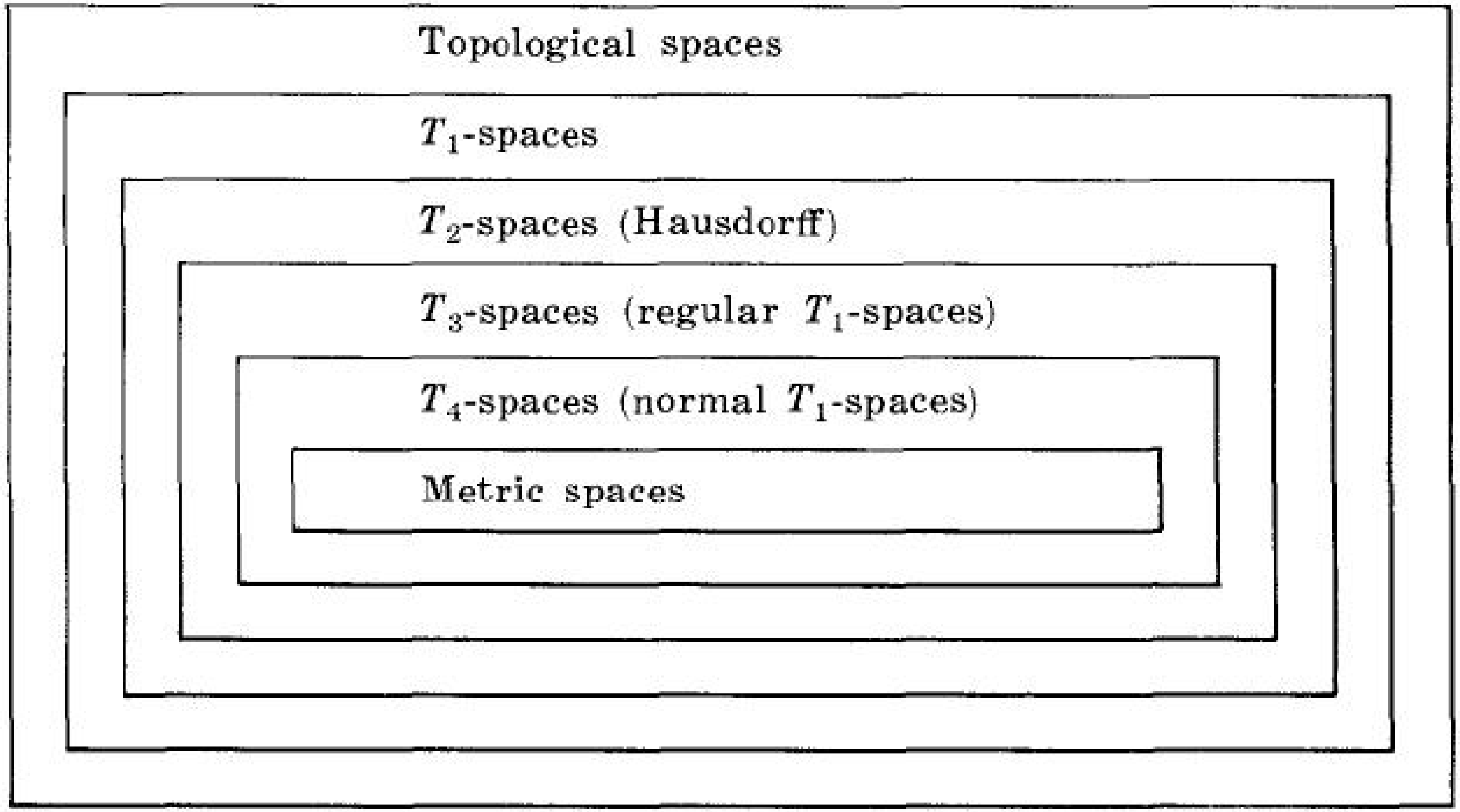
$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \forall F_1, F_2 (F_1 \cap F_2 = \phi)$ 폐집합,

$\exists$ 개집합 G, H : ($F_1 \subset G$, $F_2 \subset H$, $G \cap H = \phi$)

T_4공간

위상공간 X는 T_4공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 위상공간 X가 정규공간이고, 또한 T_1공간이다.


Topological spaces
T_1-spaces
T_2-spaces (Hausdorff)
T_3-spaces (regular T_1-spaces)
T_4-spaces (normal T_1-spaces)
Metric spaces

[정리 10.1] X 는 T_1 공간이다.

$\Leftrightarrow \quad \forall p \in X,\ \{p\}$ 가 폐집합이다.

(증명)

($\Longrightarrow$) $x \in \{p\}^c \Longrightarrow x \neq p$

$\Longrightarrow \exists$ 개집합 G, H : $x \in G, p \in H, p \notin G,\ x \notin H$

$\Longrightarrow \exists$ 개집합 G_x : $x \in G_x,\ \{p\} \subset G_x^c$

$\Longrightarrow \exists$ 개집합 G_x : $x \in G_x,\ G_x \subset \{p\}^c$

그러므로 $\{p\}^c = \cup \left\{ G_x \mid x \in \{p\}^c \right\}$: 개집합들의 합집합

$\Longrightarrow \{p\}^c$: 개집합

$\Longrightarrow \{p\}$: 폐집합

($\Longleftarrow$) ${}^\forall a \neq {}^\forall b \in X$ 에 대하여,

$\{a\}, \{b\}$ 는 폐집합

$\Longrightarrow \quad G = \{b\}^c, H = \{a\}^c$ 는 개집합, 또한 $b \notin G,\ a \notin H$

$a \neq b \ \Longrightarrow\ a \in G,\ b \in H$ ■

[따름정리 10.2] $(X, \Im)$는 T_1 공간이다.

$\Leftrightarrow$ $\Im$는 X위의 여유한위상을 포함한다.

(증명)

$\Im$가 T_1위상

$\Leftrightarrow$ 모든 단일원집합이 폐집합이다. ($\because$ 정리10.1)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 유한집합G가 폐집합 ($\because$ G:유한개의 단일원집합들의 합집합)

$\Leftrightarrow$ $\forall$ 유한집합의 여집합은 개집합이다.

$\Leftrightarrow$ 여유한위상을 포함한다. ■

[예제 1.1] 모든 거리공간은 T_1 공간이다. 왜냐하면 거리공간에서 모든 유한집합은 폐집합이기 때문이다.

[예제 1.2] $X = \{a, b\}$, $\mathfrak{I} = \{X, \phi, \{a\}\}$ 로 주어진 위상공간 $(X, \mathfrak{I})$ 은 T_1 공간이 아니다. 왜냐하면 단일원 집합 $\{a\}$ 가 폐집합이 아니기 때문이다.

[예제 1.3] 여유한위상은 T_1 위상이 되게 하는 위상중에서 가장 거친 위상이다. 따라서 **여유한위상**을 T_1 **-위상**이라고도 부른다.

T_2공간(=하우스도르프 공간)(Hausdorff Space)

위상공간 X는 T_2**공간**이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad {}^\forall a \neq {}^\forall b \in X, \ \exists \text{ 개집합 } G, H : a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$$

[정리10.3] 모든 거리공간은 T_2공간이다.

(증명) X를 거리공간이라 하자

$a, b \in X (a \neq b)$

$\Rightarrow d(a,b) = \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists$ 열린구 $G = S(a, \varepsilon/3),\ H = S(b, \varepsilon/3)$

여기에서 $a \in G,\ b \in H$ 이고 $G \cap H = \phi$ 이다. ■

[예제2.2] 실수집합 위의 여유한위상공간$(\mathrm{R}, \mathscr{F})$은 T_2가 아니다.

(증명) G, H 가 $\mathscr{F}$-개집합($G \neq \phi,\ H \neq \phi$)

$\Rightarrow G^c, H^c$ 은 유한집합이다.

$\Rightarrow G, H$은 무한집합이다. $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $G \cap H \neq \phi$

여기서 $(*)$: ($G \cap H = \phi \Rightarrow G \subset H^c$

$\Rightarrow$ 무한집합 $\subset$ 유한집합 !!) ■

[정리10.4] T_2 **공간에서 수렴열은 유일한 극한을 갖는다.**

(증명)

점열 $< a_n >$ **이 유일한 극한을 갖지 않는다**

$\Rightarrow \ \exists\, a,b(a \neq b)$ **:** $a_n \to a\,,\ a_n \to b$

$\Rightarrow \ \exists\, G,H$ **개집합 :** $a \in G,\ b \in H,\ G \cap H = \phi$ **by (**T_2**)**

$\Rightarrow \ \exists\, n_0$ **: (** $n > n_0 \Rightarrow a_n \in G$ **)** **by** $a_n \to a$

$\exists\, m_0$ **: (** $n > m_0 \Rightarrow a_n \in H$ **)** **by** $a_n \to b$

만약 $n = \max(n_0, m_0) + 1$ **이라면**

$a_n \in G \cap H$ **이다. 이것은** $G \cap H = \phi$**에 모순이다.**

따라서 점열$< a_n >$ **은 유일한 극한을 가져야 한다.** ■

[정리10.5] **위상공간 X가 제1가산공간이면,**

X가 T_2공간 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 수렴열이 유일한 극한을 갖는다.

(증명)

($\Rightarrow$) by 정리10.4

($\Leftarrow$) 만약 X가 T_2공간이 아니라면, $\exists\, a, b \in X (a \neq b)$ **:**

$a \in {}^{\forall} G$ **개집합,** $b \in {}^{\forall} H$ **개집합,** $G \cap H \neq \phi$ **이다. --(1)**

X**가 제1가산공간이므로,** a**의 가산축소국소기저** $\{G_n\}$**와**

b**의 가산축소국소기저** $\{H_n\}$**가 존재한다. 그런데 by(1),**

$G_n \cap H_n \neq \phi$ **이다. 그러므로** $\exists\, a_n \in G_n \cap H_n$ **이다.**

$\{G_n\}$**와** $\{H_n\}$**가 가산축소국소기저이므로** $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$ **이다.**

$a \neq b$ **이므로 수렴열** $< a_n >$ **은 유일한 극한을 갖지 못한다.** ■

정칙공간

위상공간 X는 **정칙공간**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $p \notin {}^{\forall} F$ 폐집합, $\exists$ 개집합 G, H : ($p \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$)

T_3공간

위상공간 X는 T_3공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ 위상공간 X가 정칙공간이고, 또한 T_1공간이다.

[예제 3.1] 집합 $X = \{a, b, c\}, \Im = \{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$ 로 주어진 위상공간 $(X, \Im)$에서, 폐집합들은 $X, \phi, \{a\}, \{b, c\}$ 이어서 $(X, \Im)$은 정칙공간이다. 그런데 집합 $\{b\}$는 유한집합인데 폐집합이 아니다. 그러므로 정리10.1 에 의하여 $(X, \Im)$은 T_1공간이 아니다.

[예제 3.2] 모든 T_3공간은 T_2공간이다.

(증명) X**를** T_3**공간이라고 하자.**

$a,b \in X(a \neq b)$

$\Rightarrow$ **1)** $F = \{b\}$ **는 폐집합 (** $\because$ X**는** T_1**)**

2) $a \notin F$ **(** $\because$ $a \neq b$ **)**

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (** $a \in G,$ $F \subset H,$ $G \cap H = \phi$ **)**

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (** $a \in G,$ $b \in H,$ $G \cap H = \phi$ **)**

그러므로 X**를** T_2**공간이다.** ■

[숙제] 다음을 증명하여라.

위상공간 X**는 정칙공간**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall} p \in {}^{\forall} H$ **개집합,** $\exists\, G$ **개집합 :** $p \in G \subset \overline{G} \subset H$

정규공간

위상공간 X는 정규공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \forall F_1, F_2 (F_1 \cap F_2 = \phi)$ **폐집합,**

$\exists$ **개집합** G, H **: (** $F_1 \subset G,\ F_2 \subset H,\ G \cap H = \phi$ **)**

T_4공간

위상공간 X는 T_4공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **위상공간 X가 정규공간이고, 또한 T_1공간이다.**

[정리 10.6] 위상공간 X는 정규공간

$\Longleftrightarrow$ $^{\forall}F$ **폐집합** $\subset$ $^{\forall}H$ **개집합,** $\exists G$ **개집합 :** $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$

(증명)

($\Longrightarrow$ **)** F **폐집합** $\subset H$ **개집합**

$\Longrightarrow F$ **폐집합 ,** H^c **폐집합 ,** $F \cap H^c = \phi$

$\Rightarrow\ \exists\, G, K$ **개집합 : (**$F \subset G,\ H^c \subset K,\ G \cap K = \phi$ **) by** X**:정규**

$\Rightarrow\ F \subset G$**,** K^c**는 폐집합,** $G \subset K^c$ **,** $K^c \subset H$

$\Rightarrow\ F \subset G$**,** $\overline{G} \subset K^c$ **,** $K^c \subset H$

$\Rightarrow\ F \subset G \subset \overline{G} \subset H$

($\Leftarrow$ **)** $F_1, F_2 (F_1 \cap F_2 = \phi)$ **폐집합,**

$\Rightarrow$ **폐집합** $F_1 \subset F_2^c$ **개집합**

$\Rightarrow\ \exists\, G$ **개집합 :** $F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$ **by 가정**

$\Rightarrow\ F_1 \subset G$ **,** $F_2 \subset (\overline{G})^c$

$H = (\overline{G})^c$ **로 놓으면** $F_2 \subset H$ **개집합 이고,**

$G \subset \overline{G} \Rightarrow (\overline{G})^c \subset G^c \Rightarrow H \subset G^c \Rightarrow G \cap H = \phi$

그러므로 $F_1 \subset G$**개집합 ,** $F_2 \subset H$ **개집합,** $G \cap H = \phi$ ■

[예제 4.1] 모든 거리공간은 정리8.8에 의하여 정규공간이다.

[예제 4.2] 정규공간이 T_1 공간이 아닐 수 있다.

(예) $X = \{a,b,c\}$, $\Im = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$**로 주어진 위상공간** $(X,\Im)$**을 생각하여 보자. 폐집합은** $X, \phi, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}$ **이라서 서로 소인 폐집합들** F_1, F_2 **중에 적어도 하나, 예를 들어** F_1**은** ϕ**이어야 한다. 그럼** $F_1 \subset \phi, F_2 \subset X,\ \phi \cap X = \phi$ **가 되어** $(X,\Im)$**은 정규공간이다. 하지만 단일원 집합** $\{a\}$**는 폐집합이 아니라서,** $(X,\Im)$**은** T_1**공간이 아니다.** ■

[예제 4.3] 모든 T_4**공간은** T_3**공간이다.**

(증명) $p \notin F$ **폐집합 이라하자.**

$\Rightarrow$ $\{p\} \cap F = \phi$ **,** $\{p\}$**는 폐집합이다. by** T_1**공간**

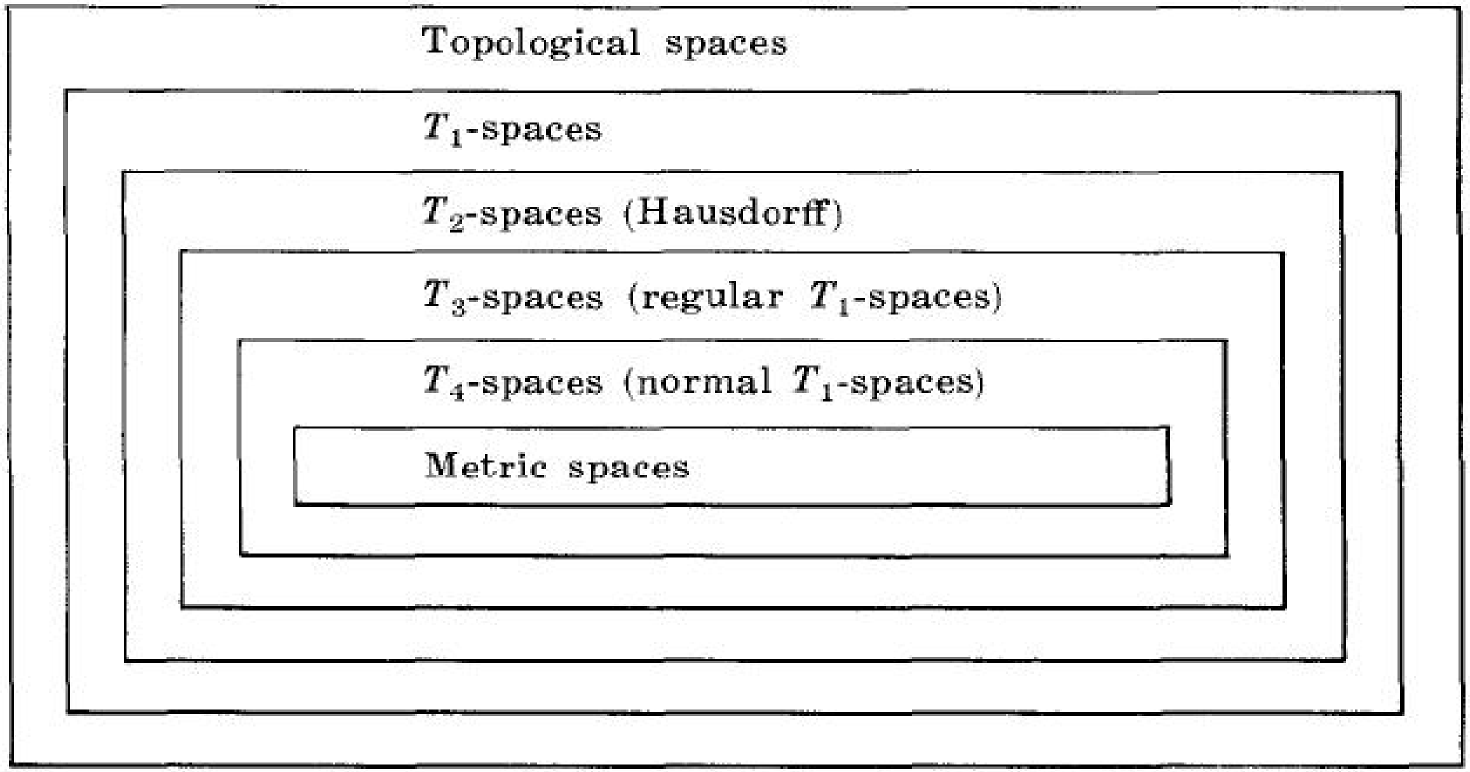
$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (** $\{p\} \subset G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$ **) by정규공간**

$\Rightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (** $p \in G,\ F \subset H,\ G \cap H = \phi$ **)** ■

[예제] 거리공간은 T_4 이다.

(설명) 정리10.3과 예제4.1의 결과

각 공간의 포함 관계



[정리10.7] 유리존의 보조정리

X가 정규공간 이고, F_1, F_2가 폐집합 in X, $F_1 \cap F_2 = \phi$이라면,

∃ 연속함수 $f : X \rightarrow [0,1]$: $f[F_1] = \{0\}$, $f[F_2] = \{1\}$.

(증명-스케치)

$F_1 \cap F_2 = \phi$

$\Rightarrow$ 폐집합 $F_1 \subset F_2^c$ 개집합

$\Rightarrow$ ∃ 개집합 $G_{1/2}$: $F_1 \subset G_{1/2} \subset \overline{G_{1/2}} \subset F_2^c$, by 정리10.6

$\Rightarrow$ ∃ 개집합 $G_{1/4}, G_{3/4}$, by 정리10.6 again,

: $F_1 \subset G_{1/4} \subset \overline{G_{1/4}} \subset G_{1/2} \subset \overline{G_{1/2}} \subset G_{3/4} \subset \overline{G_{3/4}} \subset F_2^c$

이 방법으로 계속하면,

$\forall t \in D = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid 0 < m < 2^n,\ m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N} \right\}$, ∃ 개집합 G_t

: ($t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G_{t_1}} \subset G_{t_2}$)

함수 $f:X\to[0,1]$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{t\mid x\in G_t\}, & x\notin F_2\\ 1 & ,x\in F_2\end{cases}$$

그러면 $f[F_1]=\{0\}$, $f[F_2]=\{1\}$ 이 되고, 함수 f는 연속임을 보일 수 있다. (참조 p273 증명) ■

[정리10.8] 유리존의 거리화정리

위상공간 X가 T_4 이고, 제2가산공간이면, X는 거리화 가능하다.

(증명-스케치)

X가 T_4 이고, 제2가산공간

$\Longrightarrow$ X는 힐버트공간 H의 부분공간과 위상동형이다.

$\Longrightarrow$ X는 거리화가 가능하다. ■

(참고) X**가 가분공간인 경우 역도 성립한다.**

즉, 거리공간 이고 가분공간

$\Longrightarrow$ X**는** T_4**공간 이고 제2가산공간,**

by 예제4.1, 정리9.6

점을 분리하는 함수족

함수족 $\mathcal{A} = \{ f_i : X \to Y \mid i \in I \}$ **는 점을 분리한다.**

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a, b \in X (a \neq b), \exists f \in \mathcal{A} : f(a) \neq f(b)$

(예제5.1) **함수족** $\mathcal{A} = \{ f_n : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \mid f_n(x) = \sin(nx), n \in \mathrm{N} \}$ **는 점을 분리하지 않는다. 왜냐하면** $\forall n \in \mathrm{N}$, $f_n(0) = 0 = f_n(\pi), 0 \neq \pi$ **이기 때문이다.**

[명제10.9] 함수족 $\mathcal{C}(X,\mathrm{R})=\{f:X\to\mathrm{R}\mid f:$ 연속함수 $\}$가 점을 분리하면, X는 T_2 공간이다.

(증명) 가정에 의하여,

$\forall a,b\in X(a\neq b),\ \exists f\in\mathcal{C}(X,\mathrm{R})$: $f(a)\neq f(b)$ 이다.

실수공간 R 은 T_2 공간이므로,

$\exists G,H$ 개집합 : $f(a)\in G,\ f(b)\in H,\ G\cap H=\phi$

함수 f는 연속함수이므로,

$a\in f^{-1}[G]$ 개집합, $b\in f^{-1}[H]$ 개집합, $f^{-1}[G]\cap f^{-1}[H]=\phi$

그러므로 X는 T_2 공간이다. ■

완전정칙공간

위상공간 X는 완전정칙공간이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}\ \forall p\notin {}^{\forall}F$ 폐집합 , $\exists$ 연속함수 $f:X\to[0,1]:f(p)=0,\ f[F]=\{1\}$

[명제10.10] 모든 완전정칙공간은 정칙공간이다.

(증명) X를 완전정칙공간, F는 폐집합 in X이고, $p \notin F$ 이라고 하자.

X가 완전정칙공간이므로,

$\exists$ 연속함수 $f : X \to [0,1] : f(p) = 0,\ f[F] = \{1\}$

실수공간 $\mathbb{R}$은 T_2공간이고, $0 \neq 1$ 이므로,

$\exists$ 개집합 $G, H\ :\ 0 \in G,\ 1 \in H,\ G \cap H = \phi$ 이다.

f가 연속함수이므로 $p \in f^{-1}[G]$ 개집합, $F \subset f^{-1}[H]$ 개집합 이고

$G \cap H = \phi$ 이므로 $f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = \phi$ 이다.

그러므로 X를 정칙공간이다. ■

$T_{3.5}$공간

완전정칙 T_1 공간을 $T_{3.5}$공간 (티호노프 공간)이라고 한다.

(주목)

1) T_4 공간이면 T_1 공간도 되고, 유리존의 보조정리에 의하여 완전정칙공간이므로 완전정칙 T_1 공간, 즉 $T_{3.5}$공간이 된다.

2) $T_{3.5}$공간이면 T_1 공간도 되고, 명제 10-10에 의하여 정칙공간이 되므로 T_3 공간이 된다.

[명제10.11] X가 $T_{3.5}$이면, 연속함수족 $\mathcal{C}(X,\mathrm{R})$는 점을 분리한다.

(증명) $a,b\in X, a\neq b$라고 하자. X가 T_1이므로 $\{b\}$는 폐집합이다. $a\not\in\{b\}$이고, X가 완전정칙공간이므로, $f(a)=0$, $f[\{b\}]=\{1\}$인 연속함수 $f:X\to[0,1]$가 존재한다. $f\in\mathcal{C}(X,\mathrm{R})$이고 $f(a)\neq f(b)$이므로 $\mathcal{C}(X,\mathrm{R})$는 점을 분리한다. ■

$$T_4 \overset{(T_1+\text{유리존})}{\Rightarrow} T_{3.5}(\text{점},\text{폐집}f\text{분리}) \overset{\text{명}10.10}{\Rightarrow} T_3 \overset{(T_1+\text{유리존})?}{\Rightarrow} T_{2.5}(\text{점},\text{점}f\text{분리}) \overset{\text{명}10.9}{\Rightarrow} T_2$$

$$T_{3.5}(\text{점},\text{폐집}f\text{분리}) \overset{\text{명}10.11}{\Rightarrow} T_{2.5}(\text{점},\text{점}f\text{분리})$$

제11장 콤팩트성(Compactness)

피복, 개피복, 부분피복

1) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **피복**이다.

$$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

2) 집합족 $\mathcal{G} = \{A_i\}_{i \in I}$는 집합 A의 **개피복**이다.

$\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ 이고 $(\forall i \in I,\ A_i$: 개집합) 이다.

3) $\mathcal{C}$는 $\mathcal{G}$의 **부분피복**이다.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$와 $\mathcal{G}$ 모두 어떤 집합의 피복이고, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ 이다.

[하이네-보렐 정리]

실수에서 유계인 폐구간의 모든 개피복은 유한 부분피복을 갖는다.

콤팩트집합

위상공간 X의 부분집합 A는 콤팩트이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **A의 모든 개피복이 유한 부분피복을 갖는다.**

[예제2.1] 하이네-보렐 정리에 의하여 실수공간에서 모든 유계폐구간은 $[a,b]$은 콤팩트이다.

[예제2.2] 위상공간에서 유한집합은 반드시 콤팩트이다.

[예제2.3] 실수보통위상공간에서 개구간 $A=(0,1)$은 콤팩트가 아니다.

(이유) 개구간족 $\mathcal{G}=\left\{\cdots,(\frac{1}{5},\frac{1}{3}),(\frac{1}{4},\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},1)\right\}$ 은 A를 덮는데,

$\mathcal{G}$ 안에서 유한개의 구간들을 찾아서 A를 다시 덮을 수는 없다.

[정리11.1] 콤팩트 집합의 연속함수의 상은 콤팩트이다.

(증명) 함수 $f: X \to Y$를 연속함수라 하고, $A \subset X$를 콤팩트집합이라 하자. $\mathcal{G} = \{G_i\}_i$를 A의 상 $f[A]$의 개피복이라 하자.

그러면 $f[A] \subset \bigcup_i G_i$

$$\Rightarrow A \subset f^{-1}[\bigcup_i G_i]$$

$$= \bigcup_i f^{-1}[G_i]$$

여기에서 f가 연속함수이므로 $f^{-1}[G_i]$은 개집합이다.

$\{f^{-1}[G_i]\}_i$는 A의 개피복이고 A는 콤팩트이므로 유한 부분피복 $\{f^{-1}[G_{i_1}], f^{-1}[G_{i_2}], \cdots, f^{-1}[G_{i_n}]\}$이 존재하여

$$A \subset f^{-1}[G_{i_1}] \cup f^{-1}[G_{i_2}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_n}]$$ 이다.

따라서 $f[A] \subset f[f^{-1}[G_{i_1}] \cup f^{-1}[G_{i_2}] \cup \cdots \cup f^{-1}[G_{i_n}]]$

$$= f[f^{-1}[G_{i_1}]] \cup f[[f^{-1}[G_{i_2}]] \cup \cdots \cup f[f^{-1}[G_{i_n}]]$$

$$= G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}$$

그러므로 $f[A]$는 콤팩트 집합이다. ■

콤팩트성은 다음 정리에 보는 것처럼 집합의 **절대적성질**이다.

[정리11.2] A가 위상공간 $(X, \Im)$의 부분집합 일 때,

A가 $\Im$에 관하여 콤팩트 $\Leftrightarrow$ A가 상대위상 $\Im_A$에 관하여 콤팩트이다.

(증명) (숙제)

[정리11.3] 콤팩트공간의 폐집합은 콤팩트이다.

(증명) 다음 페이지에.

집합 A가 콤팩트공간 X에 속한 폐집합

$\Rightarrow A^c$ **는 개집합**

$\mathcal{G} = \{G_i\}_i$ **를 A의 개피복**

$\Rightarrow A \subset \bigcup_i G_i$

$\Rightarrow (A \cup A^c) \subset (\bigcup_i G_i) \cup A^c$

$\Rightarrow X \subset (\bigcup_i G_i) \cup A^c$ **: 개피복, 여기서 X는 콤팩트이므로,**

$\Rightarrow \exists\, G_{i_1}, G_{i_2}, \cdots, G_{i_n}$ **:** $X \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup A^c$

$\Rightarrow (A \cup A^c) = X \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n} \cup A^c$

$\Rightarrow A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \cdots \cup G_{i_n}$ **, 이유: A^c는 A를 덮지 못하므로.**

그러므로 A는 콤팩트이다. ■

유한교차성

집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$는 **유한교차성**을 갖는다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $^\forall$유한집합 $J \subset I$, $\cap \{A_j \mid j \in J\} \neq \phi$

* 집합족 $\{A_i \mid i \in I\}$는 **전체교차성**을 가진다. $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \cap \{A_i \mid i \in I\} \neq \phi$

[예제 3.1] 개구간족 $\mathcal{A} = \left\{(0,1),(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{3}),\cdots\right\}$은 유한교차성을

갖는다. 왜냐하면

$$(0,a_1) \cap (0,a_2) \cap \cdots (0,a_n) = (0,a) \neq \phi, \quad a = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

이기 때문이다. 그런데 $\cap \mathcal{A} = \phi$, 즉 전체교차는 안된다. ■

[정리11.4] 위상공간 X가 콤팩트

$\Leftrightarrow$ 유한교차성을 가진 폐집합족이 전체교차성도 가진다.

(증명)

위상공간 X가 콤팩트

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **개집합족** $\{G_i\}_{i\in I}$ **, (** $X\subset \bigcup_{i\in I} G_i \Rightarrow \exists$ **유한집합** $J\subset I$ **:** $X\subset \bigcup_{j\in J} G_j$ **)**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **폐집합족** $\{F_i\}_{i\in I}$ **, (** $X\subset \bigcup_{i\in I} F_i^c \Rightarrow \exists$ **유한집합** $J\subset I$ **:** $X\subset \bigcup_{j\in J} F_j^c$ **)**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **폐집합족** $\{F_i\}_{i\in I}$ **, (** $X\subset \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c \Rightarrow \exists$ **유한집합** $J\subset I$ **:** $X\subset \left(\bigcap_{j\in J} F_j\right)^c$**)**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **폐집합족** $\{F_i\}_{i\in I}$ **, (** $\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subset X^c \Rightarrow \exists$ **유한집합** $J\subset I$ **:** $\left(\bigcap_{j\in J} F_j\right) \subset X^c$**)**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **폐집합족** $\{F_i\}_{i\in I}$ **, (** $\bigcap_{i\in I} F_i = \phi \Rightarrow \exists$ **유한집합** $J\subset I$ **:** $\bigcap_{i\in J} F_i = \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ $^{\forall}$ **폐집합족** $\{F_i\}_{i\in I}$ **, (** $\left(^{\forall}\right.$ **유한집합** $J\subset I$ **,** $\left.\bigcap_{j\in J} F_j \neq \phi\right) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \neq \phi$ **)**

$\Leftrightarrow$ **유한교차성을 가진 폐집합족이 전체교차성도 가진다.** ■

#7 T_2 **공간에서** A**는 콤팩트집합이고** $p \notin A$

$\Longrightarrow$ $\exists\ G, H$ **개집합 :** $p \in G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$

(증명)

$\forall a \in A,\ a \neq p$**이므로, by** T_2**조건,**

$\exists\ G_a, H_a$ **개집합 :** $p \in G_a,\ a \in H_a,\ G_a \cap H_a = \phi$

$A \subset \bigcup_{a \in A} H_a$ **(개피복)이고,** A**가 콤팩트**

$\Longrightarrow$ $\exists\ H_{a_1}, H_{a_2}, \cdots, H_{a_n}$ **:** $A \subset H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}$

$H = H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}$**,** $G = G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \cdots \cap G_{a_n}$ **라고 하면**

H **와** G**는 개집합이고** $p \in G$ **이다. 한편,**

$^{\forall} i = 1, 2, \cdots n,\ H_{a_i} \cap G_{a_i} = \phi$ **이므로,**

$$H_{a_i} \cap G = H_{a_i} \cap G_{a_1} \cap G_{a_2} \cap \cdots \cap G_{a_n}$$

$$= \phi$$

그러므로 $H \cap G = (H_{a_1} \cup H_{a_2} \cup \cdots \cup H_{a_n}) \cap G$

$$= (H_{a_1} \cap G) \cup (H_{a_2} \cap G) \cup \cdots \cup (H_{a_n} \cap G)$$

$$= \phi \cup \phi \cup \cdots \cup \phi = \phi \qquad \blacksquare$$

[정리11.5] T_2 **공간의 모든 콤팩트집합은 폐집합이다.**

(증명) A**를** T_2**공간** X**에서 콤팩트 집합이라고 하자.**

$\forall b \in A^c$, **by #7,**

$\exists\ G_b, H_b$ **개집합 :** $b \in G_b,\ A \subset H_b,\ G_b \cap H_b = \phi$

$\Longrightarrow\ G_b \cap A = \phi \Longrightarrow\ G_b \subset A^c$

그러므로 **(**$\forall b \in A^c$, $b \in G_b$, $G_b \subset A^c$**)**

$$\Longrightarrow\ A^c = \bigcup_{b \in A^c} G_b$$

$\Longrightarrow\ A^c$**는 개집합이다.** $\blacksquare$

[정리11.6] A, B **(**$A \cap B = \phi$**)가 콤팩트 in** T_2 **공간** X

$$\Rightarrow \ \exists\, G, H \text{ 개집합 : } B \subset G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$$

(증명) $\forall\, b \in B$, $A \cap B = \phi$ **이므로** $b \notin A$**이다.**

By #7, $\exists\ G_b, H_b$ **개집합 :** $b \in G_b$, $A \subset H_b$, $G_b \cap H_b = \phi$

$B \subset \bigcup_{b \in B} G_b$ **(개피복)이고,** B**가 콤팩트**

$$\Rightarrow \ \exists\ G_{b_1}, G_{b_2}, \cdots, G_{b_n} \text{ : } B \subset G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \cdots \cup G_{b_n}$$

$G = G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \cdots \cup G_{b_n}$, $H = H_{b_1} \cap H_{b_2} \cap \cdots \cap H_{b_n}$ **라고 하면**

G**와** H**는 개집합이고,** $B \subset G$ **,** $A \subset H$ **이다.**

모든 $i = 1, 2, \cdots n$ **에 대하여,** $G_{b_i} \cap H_{b_i} = \phi$ **이므로**

$$G_{b_i} \cap H = G_{b_i} \cap H_{b_1} \cap H_{b_2} \cap \cdots \cap H_{b_n}$$
$$= \phi$$

그러므로 $G \cap H = (G_{b_1} \cup G_{b_2} \cup \cdots \cup G_{b_n}) \cap H$

$$= (G_{b_1} \cap H) \cup (G_{b_2} \cap H) \cup \cdots \cup (G_{b_n} \cap H)$$

$$= \phi \cup \phi \cup \cdots \cup \phi = \phi \quad \blacksquare$$

[따름정리 11.7] **모든 콤팩트 T_2 공간은 정규공간이다.**

(증명) A, B **(**$A \cap B = \phi$**)를 폐집합이라고 하자.**

$\Rightarrow$ A, B **콤팩트 집합, by 정리 11.3**

$\Rightarrow$ $\exists\, G, H$ **개집합 :** $B \subset G,\ A \subset H,\ G \cap H = \phi$ **, by 정리11.6** $\blacksquare$

[정리11.8] X**가 콤팩트,** Y**가** T_2**공간,** $f : X \to Y$ **가 전단사, 연속함수 이면,** f^{-1}**도 연속이다. 따라서** X**와** Y**는 위상동형이다.**

(증명) $f^{-1} : Y \to X$ **가 연속함수임을 보이자.**

F가 폐집합 in X

$\Longrightarrow$ F가 콤팩트 in X , by 정리 11.3

$\Longrightarrow$ $f(F)$가 콤팩트 in Y, by f:연속함수

$\Longrightarrow$ $f(F)$는 폐집합, by 정리11.5 ■

점열콤팩트

위상공간 안의 집합 A는 점열콤팩트집합이다.

정의
$\Longleftrightarrow$ A의 원소들로 이루어진 모든 점열이 A안의 점으로 수렴하는 부분 점열을 가진다.

[예제 5.1] 유한 부분집합 A는 점열콤팩트이다.

(풀이) 점열$< a_i >$ 이 A의 원소들로만 이루어졌다면, A가 유한 집합이므로 그 점열에서 무한번 나타나는 원소가 적어도 하나 있다.

그것을 a_0 라고 하면 $< a_{0,} a_0, a_{0,} \cdots >$ 는 $< a_i >$ 의 부분 점열이고, $a_0 \in A$ 이며, 부분 점열 $< a_{0,} a_0, a_{0,} \cdots >$ 은 a_0 로 수렴한다. ■

[예제 5.2] 보통위상을 가진 실수 공간에서 개구간 $A = (0,1)$ 은 점열콤팩트가 아니다.

(증명) A 안의 점열 $< \frac{1}{2,} \frac{1}{3}, \frac{1}{4,} \cdots >$ 는 0 으로 수렴하므로 모든 부분열도 0 으로 수렴한다. 그런데 $0 \notin A$ 이다. 그러므로 A 는 점열콤팩트가 아니다. ■

가산콤팩트

위상공간 안의 집합 A 는 가산콤팩트집합이다.

정의
$\Leftrightarrow$ A 의 모든 무한 부분집합이 A 안에 집적점을 갖는다.

볼차노-바이어슈트라스 정리

실수의 모든 유계 무한 집합은 집적점을 갖는다.

[예제 6.1] 실수의 유계 폐구간 $A=[a,b]$ 은 가산콤팩트이다.

(증명) B가 A의 무한 부분집합이라면 유계집합이므로 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의하여 B는 집적점을 갖는다. A가 폐집합이므로 B의 집적점은 A에 속한다. ■

[예제 6.2] 보통위상을 가진 실수 공간에서 개구간 $A=(0,1)$은 가산콤팩트가 아니다.

(증명) A안의 무한 부분집합 $B=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots\right\}$는 0을 유일한 집적점으로 가지는데, 0이 A에 속하지 않아서 A는 가산콤팩트가 아니다. ■

[정리11.9] 1) 모든 콤팩트 공간은 가산콤팩트이다.

2) 모든 점열콤팩트 공간은 가산콤팩트이다.

(증명1) X**를 콤팩트 공간이라 하고,** $A \subset X$ **라 하자.**

A**는 집적점을 갖지 않음**

$\Longrightarrow \ \forall p \in X, p \notin A'$

$\Longrightarrow \ \forall p \in X, p \in {}^{\exists} G_p(\text{개집합}) : (G_p \setminus \{p\}) \cap A = \phi$

(따라서 G_p **은** A**의 원소를 0 개 또는 1개를 갖는다.)**

$\Longrightarrow \ \{G_p \mid p \in X\}$ **는** X**의 개피복**

$\Longrightarrow \ \exists\, G_{p_1}, G_{p_2}, \cdots G_{p_n} : X \subset G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \cdots \cup G_{p_n}$**, by 콤팩트**

$\Longrightarrow \ A \subset X \subset G_{p_1} \cup G_{p_2} \cup \cdots \cup G_{p_n} \equiv G$

$\Longrightarrow$ A**는 유한집합 (이유:** G **안에는** A**의 원소가 유한개)**

따라서 A**가 무한집합이면** A**는 집적점을 갖는다.**

(증명2) X**를 점열콤팩트 공간이라 하자**

A**가** X**의 무한 부분집합**

$\Rightarrow$ $\exists$ **점열**$< a_i >$ **in** A **:** $(i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$

$\Rightarrow$ $\exists\, p \in X,$ **부분점열**$< a_{i_k} >$ **of** $< a_i >$ **:** $(a_{i_k} \to p)$**, by 점열콤**

$\Rightarrow$ $p \in {}^{\forall} G$**: 개집합,** $\exists\, k_0 \in \mathrm{N}$ **: (** $k > k_0 \Rightarrow a_{i_k} \in G$ **)**

$\Rightarrow$ $p \in {}^{\forall} G$**: 개집합,** $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \phi$

$\Rightarrow$ p**는** A**의 집적점** ■

[#18] 점열콤팩트 공간에서는 모든 가산열린피복이 유한부분피복을 갖는다.

(증명) 위상공간 X**가 유한집합인 경우는 결과가 당연하므로,** X**를 무한 집합이라고 하자. 유한부분피복을 갖지 않은 가산 열린피복**$\{G_i : i \in \mathrm{N}\}$ **이 존재한다고 가정하자. 여기에**$\{H_i : i \in \mathrm{N}\}$**을 다음과 같이 정의하자.**

$$H_1 = G_1 \ , \quad H_2 = G_2 \setminus G_1 \ , \quad H_3 = G_3 \setminus (G_1 \cup G_2),$$

$$\cdots$$

$$H_i = G_i \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \ \cdots \ \cup G_{i-1})$$

그러면 $X \subset \cup \left\{ H_i \ : i \in \mathrm{N} \right\}$ **이고,** $\left\{ G_i \ : i \in \mathrm{N} \right\}$ **이 유한 부분피복을 갖지 않으므로,** H_i **들 중에서 공집합을 제외하고 모아도 무한개가 있어** $X \subset \cup \left\{ H_{i_k} : k \in \mathrm{N} \right\}$ **이다.** $\exists \, a_k \in H_{i_k}$ **인 점열** $< a_k >$**을 생각해 보자.**

$\forall p \in X$ **에 대하여, 어떤** i_{k_0} **가 있어** $p \in H_{i_{k_0}}$ **이 되고,** $p \in G_{i_{k_0}}$ **(개집합)**

인데 $i_k > i_{k_0}$ **이면**

$$a_k \in H_{i_k} = G_{i_k} \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \ \cdots \ \cup G_{i_{k_0}} \cup \ \cdots \ \cup G_{i_k - 1})$$

이므로 $a_k \notin G_{i_{k_0}}$ **이다. 따라서** $< a_k >$**의 어떤 부분점열 도** p **에 수렴할 수 없다. 그러므로** X **는 점열콤팩트가 아니다.** ■

[예제 6.3] 자연수 집합 $\mathbb{N}$ 위에 집합

$$\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\cdots\}$$

에 의하여 생성되는 위상을 $\Im$ 라고 하자.

(1) 집합 $B(\neq \phi)$를 $\mathbb{N}$의 (무한)부분집합이라 하자. $n \in B$이 홀수이면 $(n+1)$이 $\mathbb{N}$ 안에서 B의 집적점이 된다. $n \in B$이 짝수이면 $(n-1)$이 $\mathbb{N}$ 안에서 B의 집적점이 된다. 따라서 $(\mathbb{N}, \Im)$는 가산콤팩트이다.

(2) 집합족 $\mathcal{A}$ 는 $\mathbb{N}$ 의 개피복인데 유한 부분피복을 갖지 않는다. 따라서 $(\mathbb{N}, \Im)$는 콤팩트가 아니다.

(3) 점열 $<1,2,3,\cdots>$는 수렴하는 부분열을 포함하지 않으므로 $(\mathbb{N}, \Im)$는 점열콤팩트가 아니다.

국소콤팩트 공간

위상공간 X는 국소콤팩트이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **위상공간 X의 모든 점에 콤팩트 근방이 존재한다.**

[정리11.10] 모든 콤팩트 공간은 국소콤팩트이다.

(증명) 전체공간이 각 점의 근방이 되고, 콤팩트집합이다.

[예제 7.1] 실수 공간 R은 콤팩트는 아니지만 국소콤팩트이다.

(1) $\mathcal{A} = \{\cdots(-3,-1),(-2,0),(-1,1),(0,2),(1,3),\cdots\}$는 R의 개피복인데, 유한 부분피복을 가질 수 없다. 그러므로 R은 콤팩트가 아니다.

(2) $\delta > 0$이라고 하자. $\forall p \in \mathrm{R}$, 폐구간 $[p-\delta, p+\delta]$는 p의 근방이고, 콤팩트 집합이다. 그러므로 R은 국소콤팩트이다.

콤팩트화공간

위상공간 Y는 X의 **콤팩트화공간**이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ Y가 콤팩트공간이고, X가 Y의 부분공간과 위상동형이다.

[예제 8.1]

보통위상을 가진 실수공간 (R,u)**을 생각하자. 실수집합** R**에 두 점을 부과하여 확장된 실수집합** $\mathrm{R}^* = \mathrm{R} \cup \{-\infty, \infty\}$**위에 순서관계를**

$$\forall a \in \mathrm{R},\ -\infty < a < \infty$$

로 확장하자. 아래 형식의 집합들의 모임은 R^* **위의 어떤 위상의 기저가 되는 조건(2가지조건)을 만족한다.**

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

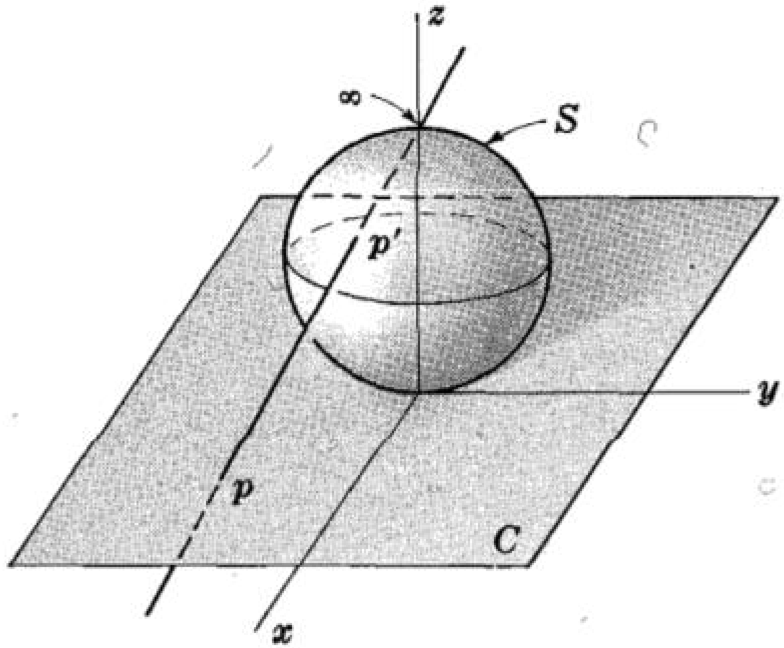
$$(a,\infty] = \{x \mid a < x\}$$

$$[-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

그 위상을 u^* **라고 하면** (R^*,u^*)**은 콤팩트공간이고, 부분공간으로** (R,u)**를 포함한다. 따라서 위상공간** (R^*,u^*)**은** (R,u)**의 콤팩트화 공간이다.** **(숙제)** (R^*,u^*)**이 콤팩트임을 보여라**

[참고] $(\mathrm{R},u) \cong (a,b)$ **이므로** $(\mathrm{R}^*,u^*) \cong [a,b]$ **임을 알 수 있다.**

[예제8.2] C는 xy평면이고, S는 반지름이 1인 구면이라고 하자. 구의 꼭대기 ∞에서 C위의 한점 p위로 직선을 이으면, 그 직선은 구면 S와 점 p'에서 만난다. 함수 $f: C \to S$, $f(p) = p'$는 C와 집합 $S \setminus \{\infty\}$와 사이에 위상동형사상이다. 구면 S는 콤팩트공간이므로 S는 C의 콤팩트화공간이다.



한점콤팩화공간(=Alexandrov콤팩트화공간)

$(X_\infty, \Im_\infty)$는 위상공간 $(X, \Im)$의 한점콤팩트화공간이다.

정의

$\Leftrightarrow$ $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, $\Im_\infty = \Im \cup \{X_\infty \setminus F \mid F$: 콤팩트, 폐집합 in $X\}$

주목: $\infty \in (X_\infty \setminus F)$

[명제11.11] $\mathfrak{I}_\infty$는 X_∞위의 위상이 되고, $(X_\infty, \mathfrak{I}_\infty)$는 $(X, \mathfrak{I})$의 하나의 콤팩트화공간이 된다.

(증명 of (X_∞ : 콤팩트))

1) $X_\infty \subset \cup \{G_i\},\ G_i \in \mathfrak{I}_\infty$

$\Rightarrow \exists\, G_{i_0} \in \mathfrak{I}_\infty : \infty \in G_{i_0}$ since $\infty \in X_\infty$

$\Rightarrow \exists\, F_{i_0}$ 콤팩트, 폐집합 in X : $G_{i_0} = X_\infty \setminus F_{i_0}$

2) $G_i \in \mathfrak{I}_\infty = \mathfrak{I} \cup \{X_\infty \setminus F \mid F$: 콤팩트, 폐집합 in $X\}$

$\Rightarrow G_i^\circ \equiv G_i \setminus \{\infty\}$

$$= \begin{cases} G_i & \text{if } G_i \in \mathfrak{I} \\ X \setminus F_i & \text{if } G_i \notin \mathfrak{I} \end{cases}$$ where F_i : 콤팩트, 폐집합 in X

$\Rightarrow G_i^\circ \in \mathfrak{I}$, since $(X \setminus F_i)$: 개집합 in X

3) $F_{i_0} \subset X_\infty \subset \cup \{G_i\}$

$\Rightarrow F_{i_0} \subset \cup \{G_i\}$

$\Rightarrow F_{i_0} \subset \cup \{G_i^\circ\}$ since $\infty \notin F_{i_0}$

$\Rightarrow F_{i_0} \subset G_{i_1}^\circ \cup \cdots \cup G_{i_n}^\circ$ since $(G_i^\circ \in \Im$, F_{i_0}: 콤팩트 in X)

$\Rightarrow F_{i_0} \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_n}$ since $G_i^\circ \subset G_i$

$\Rightarrow X_\infty = (G_{i_0} \cup F_{i_0}) \subset G_{i_0} \cup (G_{i_1} \cup \cdots \cup G_n)$ ■

[정리11.12] $(X,\Im)$가 국소콤팩트 T_2공간이면, $(X_\infty,\Im_\infty)$는 콤팩트 T_2공간이다. (증명) 생략

[정리11.14] 거리공간에서는 다음 3가지 콤팩트가 일치한다.

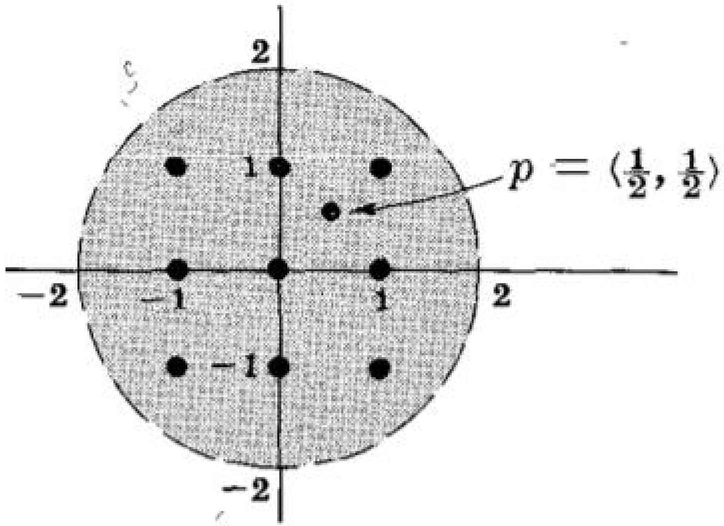
콤팩트 = 가산콤팩트 = 점열콤팩트

ε-네트 (in 거리공간)

유한집합 E는 집합 A의 ε-네트 $(\varepsilon > 0)$이다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in A,\ \exists e \in E : d(p,e) < \varepsilon$

[예제 9.1] A를 중심이 원점이고 반지름이 2인 열린원반이라고 하자. E를 그림과 같이 집합 A안에 있는 정수 성분의 점들의 집합이라고 하자.



$\varepsilon = \dfrac{3}{2}$ 일 때, E는 A의 ε-네트가 된다.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ 일 때, E는 A의 ε-네트가 아니다.

왜냐하면

A안에 있는 점 $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$는 $\forall e \in E,\ d(p, e) > \dfrac{1}{2}$이기 때문이다.

완전유계 (in 거리공간)

집합 A는 완전유계 집합이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, A가 ε-네트를 가진다.

[명제11.15]

집합 A는 완전유계 집합이다.

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists A_1, A_2, \cdots, A_n \ :\ (1)\, A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$(2)\, d(A_i) < \varepsilon, \forall i = 1, 2, \ \cdots, n$$

[명제11.16] 모든 완전유계 집합은 유계집합이다.

[예제 9.2] 명제11.16의 역이 성립하지 않는다.

(설명) 힐버트 공간에서 집합 A를 다음 점으로 이루어진 집합이라 하자.

$$e_1 = (1,0,0,\cdots),\ e_2 = (0,1,0,0,\cdots),\ e_3 = (0,0,1,0,0,\cdots),\ \ \cdots$$

그러면 $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$, ${}^\forall i \neq j$ 이다. 따라서 $d(A) = \sqrt{2}$ 이므로 A는 유계집합이다. 그러나 $\varepsilon = 1/2$라 하면, ε보다 작은 지름을 가진 A의 부분집합은 한 원소 집합이다. 따라서 A는 그런 한 원소집합들의 유한개의 합집합으로 이루어질 수 없다. 따라서 A는 완전유계 집합이 아니다.

[보조정리 11.17] 거리공간에서 점열콤팩트이면 완전유계이다.

(증명) 대우로 증명.

집합 A가 완전유계가 아니다.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : A$**는 ε-net를 갖지 않는다.**

$a_1 \in A \quad \Rightarrow \quad \exists\, a_2 \in A : d(a_1, a_2) \geq \varepsilon$

그렇지 않다면, $\{a_1\}$이 ε-net가 된다.

$\Rightarrow \quad \exists\, a_3 \in A : d(a_1, a_3) \geq \varepsilon,\ d(a_2, a_3) \geq \varepsilon$

그렇지 않다면, $\{a_1, a_2\}$이 ε-net가 된다.

이 방법으로, $\exists$ 점열$< a_1, a_2, a_3, \cdots > : d(a_i, a_j) \geq \varepsilon, {}^{\forall} i \neq j$

이 점열은 수렴하는 부분 점열을 가질 수가 없다. ■

르벡수 (of 피복 in 거리공간)

$\delta > 0$**는 집합 A의 피복 $\mathcal{A}$ 의 르벡수이다.**

정의
$\Leftrightarrow$ (($B \subset A,\ d(B) < \delta$) $\Rightarrow\ \exists\, G \in \mathcal{A} : B \subset G$)

[보조정리 11.18] **거리공간에서 점열콤팩트 집합의 모든 개피복은 르벡수를 갖는다.**

(증명)

$\mathcal{A}$ 를 점열콤펙트 집합 A 의 개피복이라고 하자. 만약 $\mathcal{A}$ 의 르벡수가 존재하지 않는다고 하면

$\forall n \in \mathrm{N},\ \exists B_n \subset A$:

(1) $d(B_n) < \delta_n \equiv 1/n$

(2) ${}^{\forall} G \in \mathcal{A}$, $B_n \not\subset G$

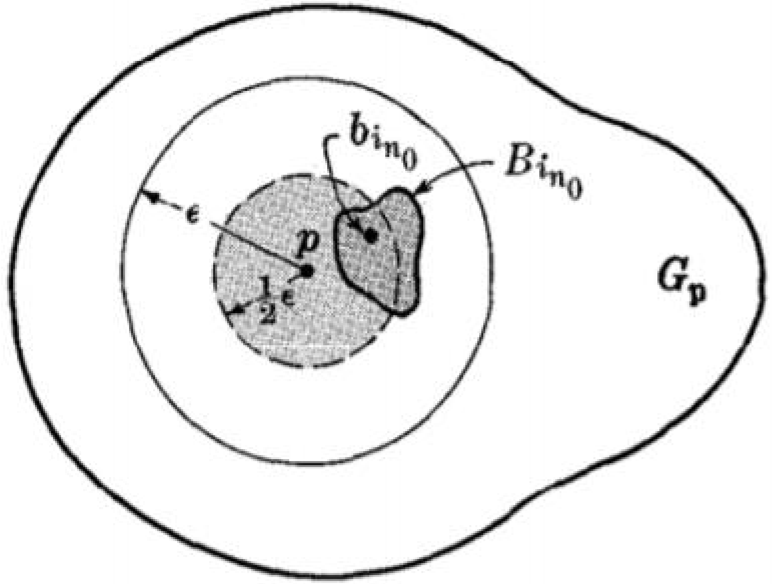
이다. 여기서

$\forall n \in \mathrm{N},\ \ B_n \neq \phi$ (이유: $B_n \not\subset G$)

$\Rightarrow \forall n \in \mathrm{N},\ \exists b_n \in B_n (\subset A)$

$\Rightarrow\ \ \exists p \in A$, 부분 점열 $< b_{n_k} >$: $b_{n_k} \rightarrow p$ (이유: A 가 점열콤팩트)

$\Rightarrow\ \ \exists$ 개집합 $G_p \in \mathcal{A}$: $p \in G_p$ (이유: $\mathcal{A}$ 가 A 의 피복)



$\Longrightarrow$ ∃ **열린구** $S(p,\varepsilon)$ **이 존재하여** $p \in S(p,\varepsilon) \subset G_p$

$\Longrightarrow$ $\exists\, n_k$ **:** $1/n_k < \varepsilon/2 \,\wedge\, d(p, b_{n_k}) < \varepsilon/2$ **(이유 :** $b_{n_k} \to p$ **)**

$\Longrightarrow$ $d(p, b_{n_k}) < \varepsilon/2$ **,** $d(B_{n_k}) < \varepsilon/2$ **(이유 :** $d(B_{n_k}) < \delta_{n_k} \equiv 1/n_k$ **)**

$\Longrightarrow$ $B_{n_k} \subset S(p,\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ $B_{n_k} \subset G_p$ **(이유:** $S(p,\varepsilon) \subset G_p$ **)**

$\Longrightarrow$ **모순! to (**$\forall\, G \in \mathcal{A}$ **,** $B_n \not\subset G$**)**

모순이 일어나지 않으려면, $\mathcal{A}$ **의 르벡수가 존재해야 한다.** ■

[정리11.14] 거리공간에서는 다음 3가지 콤팩트가 일치한다.

콤팩트 = 가산콤팩트 = 점열콤팩트

(증명 : A **가 콤팩트** $\Longrightarrow$ A **가 가산콤팩트)**

[정리11.9]-1) 에서 증명되었다.

(증명 : A 가 가산콤팩트 $\Longrightarrow$ A 가 점열콤팩트)

$< a_1, a_2, a_3, \cdots >$ 를 A의 점열이라고 하자. 점열의 치역인 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots \}$에 대하여,

1) B가 유한집합인 경우

어떤 a_{i_0} 가 존재하여 무한개의 $j \in \mathrm{N}$에 대하여, $a_{i_0} = a_j$가 된다.

그래서 $< a_{i_0}, a_{i_0}, a_{i_0}, \cdots >$ 는 $< a_1, a_2, a_3, \cdots >$ 의 부분열이며,

a_{i_0} 로 수렴한다.

2) B가 무한집합인 경우

A가 가산콤팩트이므로 B는 A안에 집적점 p를 가진다. 그러므로 $\forall n \in \mathrm{N},\ \exists a_{i_n} \in (\mathrm{B}(p, 1/n) \setminus \{p\}) \cap B \neq \phi$ 이고, $a_{i_n} \to p$ 이다.

1),2) 에 의하여, 점열$< a_1, a_2, a_3, \cdots >$ 는 수렴하는 부분열을 가진다.

(증명 : A 가 점열콤팩트 $\Longrightarrow$ A 가 콤팩트)

$\mathcal{A}$ 를 A 의 개피복

$\Longrightarrow$ $\exists$ 르벡수 $\delta > 0$ by (보조정리11.18, A: 점열콤팩트)

A 가 점열콤팩트

$\Longrightarrow$ A 는 완전유계 by 보조정리11.17

$\Longrightarrow$ $\exists\, B_{1,} B_2, \cdots B_n$: (1) $d(B_i) < \delta$

(2) $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ by 명제11.15

$\Longrightarrow$ $\exists\, G_{1,} G_2, \cdots G_n \in \mathcal{A}$: $B_i \subset G_i$, ${}^{\forall} i = 1, 2, 3, \cdots, n$

(이유 : δ 가 피복 $\mathcal{A}$ 의 르벡수)

$\Longrightarrow$ $A \subset G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$

A 의 임의의 개피복이 유한부분피복을 가지므로 A 는 콤팩트 집합이다. ■

[#25] $f:(X,d)\to(Y,d^*)$ **가 거리공간 사이의 연속함수라고 하자.**

(X,d) **가 콤팩트 이면** f **는 균등연속이다. (** f **는 균등연속**

정의

$\Leftrightarrow$ **(** $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta(\varepsilon)>0:(d(x,y)<\delta\Rightarrow d^*(f(x),f(y))<\varepsilon)$ **))**

(증명)

$\varepsilon>0$ **라 하자.** f **는 모든 점** $p\in X$ **에서 연속이므로,**

$\exists\ \delta_p>0$ **: (** $x\in S(p,\delta_p)\Rightarrow f(x)\in S(f(p),\varepsilon/2)$ **) -- (1)**

집합족 $\mathcal{A}=\{S(p,\delta_p)\mid p\in X\}$ **는 콤팩트 집합** X **의 개피복이다.**

거리공간 X **는 또한 점열콤팩트이므로,** $\mathcal{A}$ **는 르벡수** $\delta>0$ **를 갖는다.**

$d(x,y)<\delta$

$\Rightarrow\ d(\{x,y\})<\delta$ **(설명:** $d(\{x,y\})$ **은 집합의 크기)**

$\Rightarrow\ \exists\,S(p_0,\delta_{p_0})\in\mathcal{A}:\{x,y\}\subset S(p_0,\delta_{p_0})$ **by** δ**:** $\mathcal{A}$ **의 르벡수**

$\Rightarrow\ f(x),f(y)\in S(f(p_0),\varepsilon/2)$ **by (1)**

$\Rightarrow\ d(f(x),f(y))<\varepsilon$ **(이유: 반지름** $\varepsilon/2$ **의 구에 포함)** ■

제12장 적공간(Product Space)

적집합과 사영함수

$\{X_i \mid i \in I\}$가 임의의 집합족일 때 X가 **적집합**

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{ < a_i : i \in I > \mid a_i \in X_i \}$$

일 때 함수

$$\pi_j : X \to X_j \ , \quad \pi_j(< a_i : i \in I >) = a_j \in X_j$$

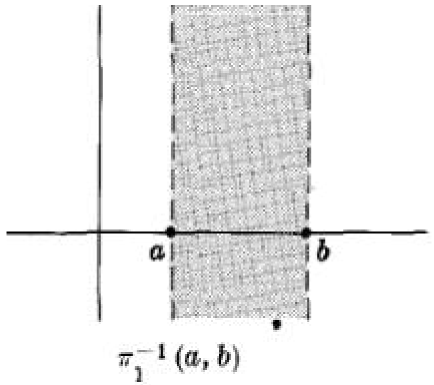
로 정의되는 함수를 **사영함수**라고 한다.

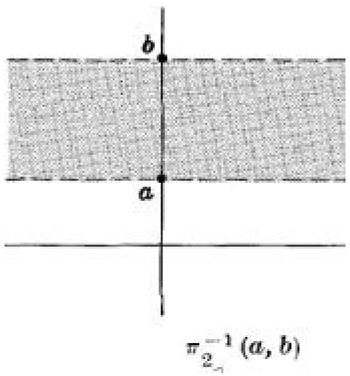
적위상과 적공간

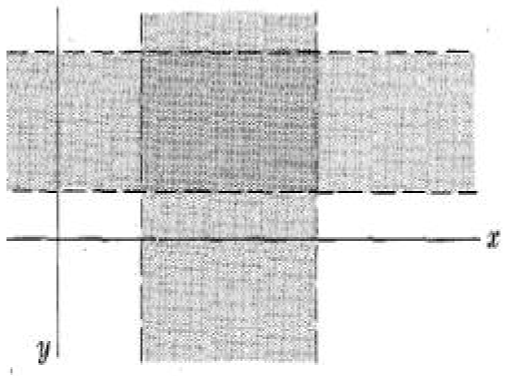
$\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간 족일 때 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위에, 모든 사영함수 $\forall i \in I, \pi_i : X \to X_i$ 를 연속이 되게 하는 X 위의 가장 작은 위상 $\Im$을 **적위상(product topology)** 이라고 하고, $(X, \Im)$를 **적공간**이라고 한다.

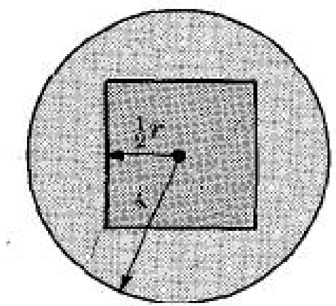
다시 말하면, 적위상은 사영함수들에 의하여 생성된 위상이다. 따라서 적위상 $\Im$은 집합족 $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I}\left\{\pi_i^{-1}(G) \mid G\in\Im_i\right\}$를 부분기저로 갖는 X위의 위상이다.

[예제 1.1] R^2위의 적위상은 $\pi_1^{-1}((a,b))$와 $\pi_2^{-1}((a,b))$와 같은 유형의 집합들이 부분기저를 이루는데, 이것들은 그림과 같이 긴 띠를 이루고 있다. 기저의 원소는 이 띠들의 교집합인 열린 사각형 내부안의 점들의 집합인데 이것들은 R^2위에 보통위상을 만든다.









[정리12.1] R^2위의 보통위상은 적위상이다.

[예제1.2] T_2 **공간들** $\{X_i \mid i \in I\}$**의 적공간** $X = \prod_{i \in I} X_i$**은** T_2 **공간이 된다.**

(증명)

$p = < a_i : i \in I >,\ q = < b_i : i \in I >$ **는** X **위에서의 다른 두 점**

$\Rightarrow \exists\, i_0$ **:** $a_{i_0} \neq b_{i_0}$

$\Rightarrow \exists$ **개집합** G, H **in** X_{i_0} **:** $a_{i_0} \in G,\ b_{i_0} \in H,\ G \cap H = \phi$

(이유 : X_{i_0} **는** T_2 **공간이므로)**

$\Rightarrow$ **1)** $p \in \pi_{i_0}^{-1}[G],\ q \in \pi_{i_0}^{-1}[H]$

2) $\pi_{i_0}^{-1}[G] \cap \pi_{i_0}^{-1}[H] = \pi_{i_0}^{-1}[\,G \cap H\,] = \phi$

3) $\pi_{i_0}^{-1}[G],\ \pi_{i_0}^{-1}[H]$ **: 개집합**

(이유 : X **가 적공간이므로** π_{i_0} **는 연속함수)**

그러므로 적공간 $X = \prod_{i \in I} X_i$**은** T_2 **공간이 된다.** ■

[명제12.2] 유한개의 위상공간 $(X_1, \Im_1), (X_2, \Im_2), \cdots, (X_n, \Im_n)$에 대하여, 집합족 $\mathcal{A} = \{G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n \mid G_i \in \Im_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$은 적공간 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 위의 적위상의 기저가 된다.

(주의) 무한개의 경우는 적위상이 아닌, 적위상보다 더 섬세한 위상이 된다.

(증명)

집합족 $\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\pi_i^{-1}(G) \mid G \in \Im_i\}$는 적위상 $\Im$의 부분기저이므로 $\Im$의 기저의 원소들은 $\mathcal{S}$ 안의 유한개의 집합들을 교집합한 것들이다.

같은 공간 $\Im_i\,(1 \leq i \leq n)$속의 개집합들 $G_1, G_2, \cdots, G_k \in \Im_i$의 경우에

$$\begin{aligned} &\pi_i^{-1}(G_1) \cap \pi_i^{-1}(G_2) \cap \cdots \cap \pi_i^{-1}(G_k) \\ &= \pi_i^{-1}(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) \\ &= \pi_i^{-1}(G), \quad G = (G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) \in \Im_i \end{aligned}$$

와 같이 하나의 개집합 G를 사용하여 $\pi_i^{-1}(G)$로 표시할 수 있으므로

$\Im$의 기저의 원소들은 아래처럼 표시할수 있다.

$$\pi_1^{-1}(G_1) \cap \pi_2^{-1}(G_2) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(G_n)$$

= 띠들의 유한 교집합

= $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 여기서 $G_i \in \Im_i \,(1 \le i \le n)$ ■

[정리12.3] $\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간 족일 때 집합족

$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \left\{ \left(\prod_{j \neq i} X_j \right) \times G \;\middle|\; G \in \Im_i \right\}$은 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 적위상

$\Im$의 **부분기저**이다.

(증명)

$\mathcal{S}$ 이 적위상 $\Im$의 부분기저

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \left\{ \pi_i^{-1}(G) \mid G \in \Im_i \right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \left\{ \left(\prod_{j \neq i} X_j \right) \times G \mid G \in \Im_i \right\} \qquad ■$$

[정리12.4] $\{(X_i, \mathfrak{I}_i) \mid i \in I\}$이 위상공간족일 때 집합족

$$\mathscr{B} = \left\{ \left(\prod_{j \notin J} X_j \right) \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \cdots \times G_{j_n} \mid G_j \in \mathfrak{I}_j, \forall j \in J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\} \subset I \right\}$$

은 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 적위상의 **기저**이다.

(증명) 집합족 $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \left\{ \pi_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{I}_i \right\}$는 적위상 $\mathfrak{I}$의 부분기저

이므로 $\mathfrak{I}$의 기저의 원소들은 $\mathcal{S}$ 안의 유한개의 집합들을 교집합한

것들이다. 한 $\mathfrak{I}_i\,(1 \le i \le n)$속의 개집합들 $G_1, G_2, \cdots, G_k \in \mathfrak{I}_i$의 경우는

$$\begin{aligned}
&\pi_i^{-1}(G_1) \cap \pi_i^{-1}(G_2) \cap \cdots \cap \pi_i^{-1}(G_k) \\
&= \pi_i^{-1}(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k) \\
&= \pi_i^{-1}(G), \qquad G = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k \in \mathfrak{I}_i
\end{aligned}$$

와 같이 하나의 개집합 G를 사용하여 $\pi_i^{-1}(G)$로 표시할 수 있으므로

$\mathfrak{I}$의 기저의 원소들은 일반적으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\pi_{j_1}^{-1}(G_{j_1}) \cap \pi_{j_2}^{-1}(G_{j_2}) \cap \cdots \cap \pi_{j_n}^{-1}(G_{j_n})$$

$$= \Big[\Big(\prod_{j \neq j_1} X_j \Big) \times G_{j_1} \Big] \cap \Big[\Big(\prod_{j \neq j_2} X_j \Big) \times G_{j_2} \Big] \cap \cdots \cap \Big[\Big(\prod_{j \neq j_n} X_j \Big) \times G_{j_n} \Big]$$

$$= \Big(\prod_{j \notin J} X_j \Big) \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times \cdots \times G_{j_n}$$

여기서 $G_j \in \mathfrak{I}_j$, $\forall j \in J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$. ■

마지막 등호 증명 스케치 :

$$(x_1, x_2, x_3) \in (X_1 \times G_2 \times X_3) \cap (X_1 \times X_2 \times G_3)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in (X_1 \times G_2 \times X_3) \wedge (x_1, x_2, x_3) \in (X_1 \times X_2 \times G_3)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in G_2 \wedge x_3 \in X_3) \wedge (x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_3 \in G_3)$$

$$\Leftrightarrow x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in G_2 \wedge x_3 \in X_3 \wedge x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_3 \in G_3$$

$$\Leftrightarrow x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in G_2 \wedge x_3 \in G_3$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in (X_1 \times G_2 \times G_3)$$

적공간의 예

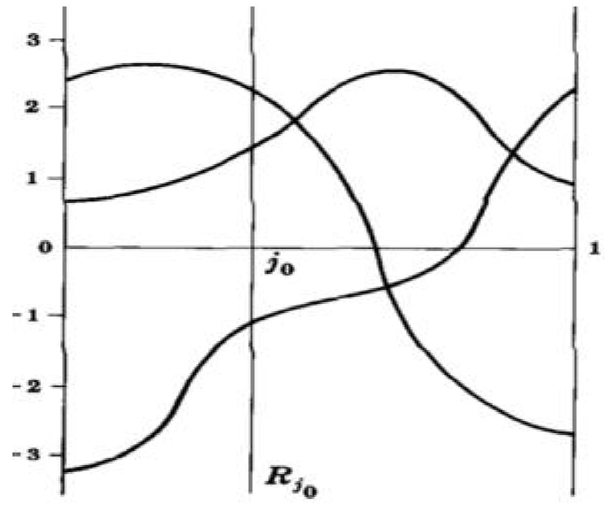
R_i 를 실수공간 R의 복사된 공간이라 하자.

적공간 $X=\prod_{i\in I}\mathrm{R}_i$ 의 원소들은 그림과 같다.

수평선은 첨수집합 $I=[0,1]$ 을 나타내고,

폐구간 $I=[0,1]$ 위의 한 점 j_0 을 지나는

수직선은 좌표공간 R_{j_0} 을 나타낸다.



Members of X

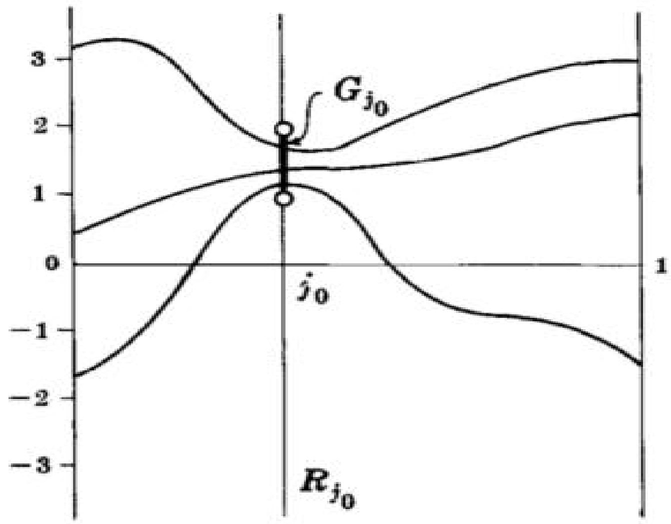
적공간 X의 한 원소 $p\in X$는 폐구간 I에서

R 로 가는 함수 $p:I\to\mathrm{R}$ 이다.

X 위의 적위상의 부분기저의 원소는 다음과 같다.

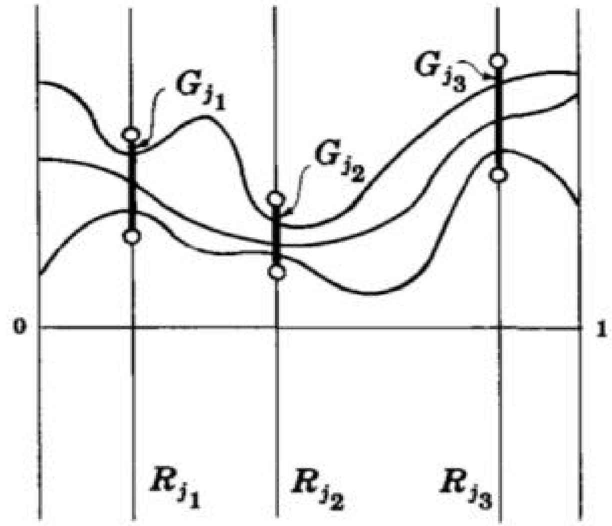
$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]=\left(\prod_{i\neq j_0}\mathrm{R}_i\right)\times G_{j_0}$$

여기서 G_{j_0} 는 좌표공간 R_{j_0} 에서의 개집합이다.



Members of $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$

예를 들어 $G_{j_0}=(1,2)$ 이라면 $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 은 $a_{j_0}\in G_{j_0}=(1,2)$ 인 X 안의 모든 점 $p=<a_i:i\in I>$ 즉 $1<p(j_0)<2$ 인 모든 함수들 $p:I\to\mathrm{R}$ 로 이루어진다. 그래프로 보면, $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ 은 좌표공간 R_{j_0} 을 나타내는 수직선 위의 개구간 $G_{j_0}=(1,2)$ 을 통과하는 모든 함수들로 이루어진다.



Members of B

마지막으로, X 위의 적위상의 기저의 원소인 개집합 B 를 묘사해 보자. B 는 부분기저의 안에 유한 개의 원소들의 교집합이므로, 예를 들어, 다음과 같다.

$$B=\pi_{i_1}^{-1}[G_1]\ \cap\ \pi_{i_2}^{-1}[G_2]\ \cap\ \pi_{i_3}^{-1}[G_3]$$

그래프로 보면, B 는 좌표 공간 $\mathrm{R}_{i_1},\mathrm{R}_{i_2},\mathrm{R}_{i_3}$ 위의 각 개집합 G_{i_1},G_{i_2},G_{i_3} 을 통과하는 함수들로 구성된다.

[명제 12.8] $\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간족일 때 집합족

$$\mathscr{B} = \left\{\prod_{i \in I} G_i \mid G_i \in \Im_i\right\}$$

은 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 어떤 위상의 기저가 될 수 있다.

상자위상

$\{(X_i, \Im_i) \mid i \in I\}$이 위상공간족일 때 집합족 $\mathscr{B} = \left\{\prod_{i \in I} G_i \mid G_i \in \Im_i\right\}$을 기저로 갖는 적집합 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 위상을 **상자위상(box topology)** 이라 한다.

[참고] $X = \prod_{i \in I} X_i$ 위의 상자위상은 첨수집합 I 가 유한집합일 때는 적위상과 일치하지만 I 가 무한집합일 때는 적위상과 다르고, 적위상보다 더 섬세한 위상이 된다.

[정리12.9] 티코노프 정리

콤팩트공간들의 적공간은 콤팩트가 된다.

제13장 연결성(Connectedness)

분리된 두 집합(집합 2개)

위상공간 안의 두 집합 (A, B)는 분리되어 있다. (붙어있지 않다)

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ $A \cap \overline{B} = \phi \ \wedge \ \overline{A} \cap B = \phi$

[예제1.1] 실수공간 $\mathbb{R}$ 에서 다음 구간들을 생각하자.

$$A = (0,1),\ B = (1,2),\ C = [2,3)$$

여기에서 $\overline{A} \cap B = [0,1] \cap (1,2) = \phi$ **이고,** $A \cap \overline{B} = (0,1) \cap [1,2] = \phi$

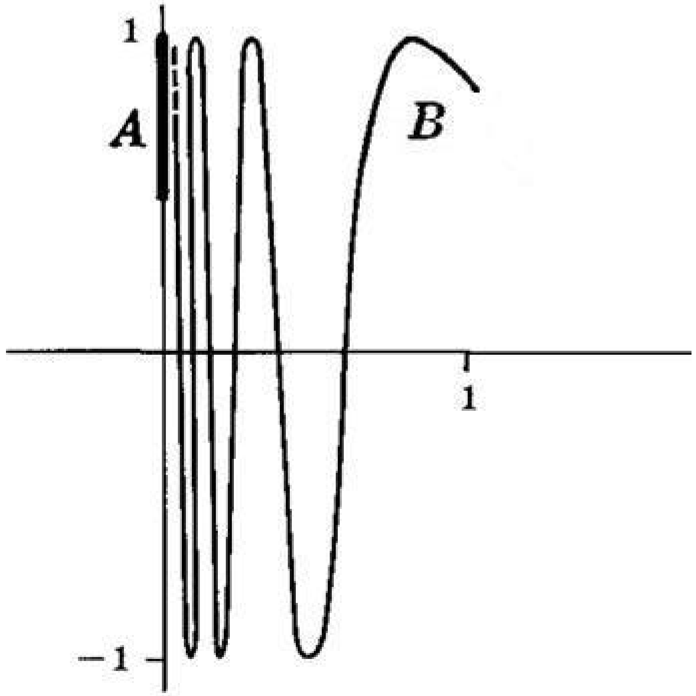
이므로 (A, B)는 분리되어 있다. 하지만 $\overline{B} \cap C = [1,2] \cap [2,3) = \{2\} \neq \phi$

이므로 (B, C)는 분리되어 있지 않다.

[예제 1.2] 평면공간 R^2의 부분집합들

$$A = \left\{(0, y) \mid \frac{1}{2} \le y \le 1\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x \le 1\right\}$$



에서 A의 각 원소들은 집합 B의 집적점 이므로 $A \cap \overline{B} \neq \phi$이 된다. 그러므로 집합 (A, B)는 분리되어 있지 않다.

절단(개집합의 쌍) of 집합

개집합의 쌍 (G, H)은 집합 A의 절단이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ **(1)** $A \cap G \neq \phi,\ A \cap H \neq \phi$

(2) $(A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$ **(또는** $(G \cap H) \subset A^c$ **)**

(3) $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$ **(또는** $A \subset G \cup H$ **)**

연결집합(집합 1개)

집합 A는 연결집합이다.

정의
$\Leftrightarrow$ 집합 A의 절단이 존재하지 않는다.

[주의] (1) 공집합은 연결집합이다.
(2) 단일원 집합은 연결집합이다.

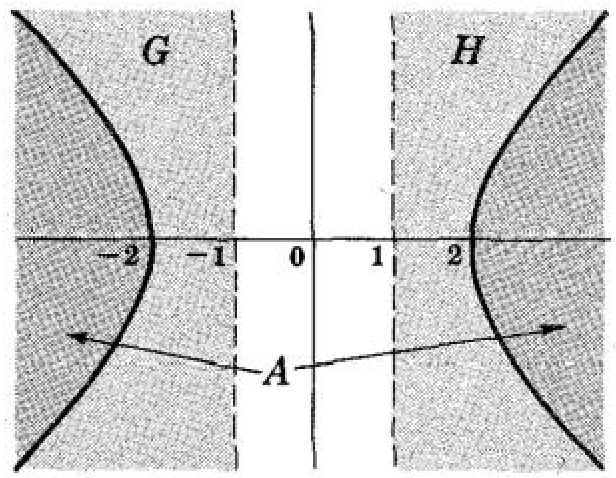
[예제2.1] 평면공간 R^2의 부분집합

$$A=\{(x,y)\mid x^2-y^2\geq 4\}$$

는 연결집합이 아니다. 왜냐하면

$$G=\{(x,y)\mid x<-1\},\ H=\{(x,y)\mid x>1\}$$

는 집합 A의 절단이다.



[예제2.2] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 위의 위상 $\Im=\{X,\phi,\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{e\}\}$ 에서, 집합 $A=\{a,d,e\}$ 는 비연결집합이다. 왜냐하면 $G=\{a,b,c\}$, $H=\{c,d,e\}$ 는 집합 A의 절단이기 때문이다.

[정리 13.1] 집합 A는 연결집합

$\Leftrightarrow$ A는 공집합이 아닌 분리되어 있는 두집합의 합집합이 아니다.

[정리 13.1] 집합 A는 비연결집합

$\Leftrightarrow$ A는 공집합이 아닌 분리되어 있는 두집합의 합집합이다.

(증명)

($\Longrightarrow$)[문제#2]

집합 A는 비연결집합

$\Longrightarrow$집합 A의 절단 (G,H)가 존재한다.

$\Longrightarrow$ **(1)** $A\cap G \neq \phi,\ A\cap H \neq \phi,$ **--(*)**

(2) $(A\cap G)\cap(A\cap H)=\phi,\ (A\cap G)\cup(A\cap H)=A$ **--(**)**

즉 $H\cap(A\cap G)=\phi$ **--(***)**

만약 $\exists\, p$**:** $p\in\overline{A\cap G}$ **,** $p\in A\cap H$

$\Longrightarrow p\in\overline{A\cap G}$ **,** $p\in H$ **(개집합)**

$\Longrightarrow\ H\cap(A\cap G)\neq\phi$

(이유 : $p\in\overline{A\cap G} \Leftrightarrow p\in {}^{\forall}H$: 개집합, $H\cap(A\cap G)\neq\phi$**)**

$\Longrightarrow$ **모순 to (***)**

그러므로 $\overline{A\cap G}\ \cap(A\cap H)=\phi$ **--(^)**

비슷하게, $(A\cap G)\ \cap\overline{A\cap H}=\phi$ **--(^)**

(*),(^) $\Longrightarrow$ **두 집합** $A\cap G,\ A\cap H$**는 분리되어 있다.**

그러므로, by(**), A**는 분리되어 있는 두 집합의 합집합이다.**

($\Longleftarrow$) **[문제#1]**

$A = B \cup C \ (B \neq \phi, C \neq \phi)$ --(*) 이고 B, C가 분리된 두 집합

$\Rightarrow \ B \cap \overline{C} = \phi, \ \overline{B} \cap C = \phi$

$\Rightarrow \ B \subset (\overline{C})^c \subset C^c, \ C \subset (\overline{B})^c \subset B^c$

$\Rightarrow \ B \subset G \subset C^c, \ C \subset H \subset B^c$ by $G \equiv (\overline{C})^c, H \equiv (\overline{B})^c$

1) G, H 는 개집합

2) $B \cap G = B, \ C \cap G = \phi, \ C \cap H = C, \ B \cap H = \phi$

$\Rightarrow A \cap G = (B \cap G) \cup (C \cap G) = B \cup \phi = B \neq \phi$ by(*)

$A \cap H = (B \cap H) \cup (C \cap H) = \phi \cup C = C \neq \phi$ by(*)

$\Rightarrow (A \cap G) \cap (A \cap H) = B \cap C = \phi$ by $B \subset C^c$

$\Rightarrow (A \cap G) \cap (A \cap H) = \phi$

3) $(A \cap G) \cup (A \cap H) = B \cup C = A$ by(*)

1),2),3) $\Rightarrow (G, H)$는 A의 절단 $\Rightarrow A$는 비연결집합 ■

[문제#4] (G,H) 가 A의 절단이고, B가 연결집합이고 A의 부분집합이면,

$B \subset G$ 또는 $B \subset H$ 이다.

(증명)

(G,H) 가 A의 절단

$\Rightarrow A \subset G \cup H$, $G \cap H \subset A^c$

$\Rightarrow B \subset G \cup H$, $G \cap H \subset B^c$ **(이유: $B \subset A$, $A^c \subset B^c$)**

B가 연결집합이므로 (G,H)가 B의 절단이 아니라면, (3조건중나머지)

$B \cap G = \phi$ v $B \cap H = \phi$이다. 그런데 $B \subset G \cup H$ 이므로

$B \subset H$ v $B \subset G$ 이다. ■

[명제 13.2] 집합 A, B가 연결집합들이고 분리되지 않았다면,

$A \cup B$도 연결집합이다.

(증명) 대우로 증명.

만약 $A\cup B$ **가 연결집합이 아니면** $A\cup B$**의 절단 (**G,H**)가 존재한다.**

(1) (G,H**)가** $A\cup B$**의 절단**

$\Rightarrow$ **(a)** $(A\cup B)\cap G\neq\phi$**,** $(A\cup B)\cap H\neq\phi$ **---(*)**

(b) $(G\cap H)\subset(A\cup B)^c$

$\Rightarrow(G\cap H)\cap(A\cup B)=\phi$ **--(**)**

$\Rightarrow((G\cap H)\cap A)\cup((G\cap H)\cap B)=\phi$ **by 분배법칙**

$\Rightarrow(G\cap H)\cap A=\phi$ **∧** $(G\cap H)\cap B=\phi$

$\Rightarrow(A\cap G)\cap H=\phi$ **∧** $(B\cap H)\cap G=\phi$**--(***) by 결합법칙**

(2) (G,H**)가** $A\cup B$**의 절단 ∧** A, B **는 각각 연결집합**

$\Rightarrow$ **(**$A\subset G$ **∨** $A\subset H$**) ∧ (**$B\subset G$ **∨** $B\subset H$**) by [문제#4]**

(3) $A,B\subset G$

$\Rightarrow$ $A\cup B\subset G$

$\Rightarrow$ $A\cup B=(A\cup B)\cap G$

$\Rightarrow\ (A\cup B)\cap H = (A\cup B)\cap G\cap H$ **by 양변에** $\cap H$

$\Rightarrow\ (A\cup B)\cap H = \phi$ **since**$(A\cup B)\cap(G\cap H) = \phi$ **by(**)**

$\Rightarrow$ **모순 to (*)**

$A, B\subset H$ **인 경우도 모순, 그러므로** $A\subset G$ **이면** $B\subset H$ **by(2)**

(4) **(** $A\subset G$ **∧** $B\subset H$ **)** $\Rightarrow$ **(** $A\cap G = A$ **∧** $B\cap H = B$ **)**

(5) $(A\cap G)\cap H = \phi$ **∧** $(B\cap H)\cap G = \phi$ **by(***)**

$\Rightarrow (A)\cap H = \phi$ **∧** $(B)\cap G = \phi$ **by(4)**

$\Rightarrow$**(a)** $(A\cup B)\cap G \overset{\text{분배법칙}}{=} (A\cap G)\cup(B\cap G) \overset{(4)}{=} A\cup\phi = A$

(b) $(A\cup B)\cap H \overset{\text{분배법칙}}{=} (A\cap H)\cup(B\cap H) \overset{(4)}{=} \phi\cup B = B$

$\Rightarrow (A\cup B)\cap G = A$ **∧** $(A\cup B)\cap H = B$

(6) (G, H**)가** $A\cup B$**의 절단**

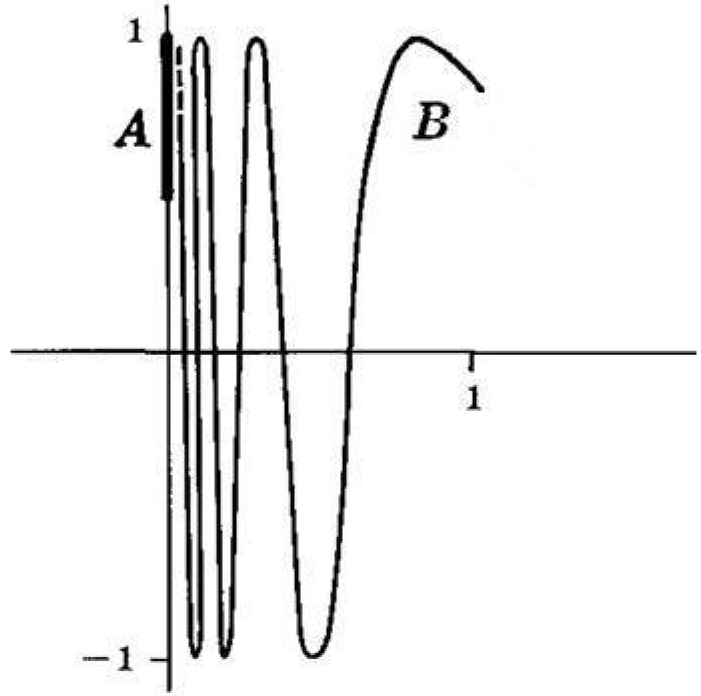
$\Rightarrow \underbrace{(A\cup B)\cap G}_{=A}$ **와** $\underbrace{(A\cup B)\cap H}_{=B}$ **는 분리됨. by [문제#2의 증명]**

■

[예제 2.3] 평면공간 R^2 의 부분집합들

$$A = \left\{(0, y) \mid \frac{1}{2} \le y \le 1\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 < x \le 1\right\}$$



에서 A, B 는 각각 연결집합인데, [예제2.1] 에서 분리되어 있지 않음을 보였다.

그러므로 [명제13.2]에 의하여 $A \cup B$ 는 연결집합이다.

[정리 13.3] 위상공간 $(X, \Im)$ 의 부분집합 A 에 대하여,

A 가 $\Im$ 에 관하여 연결집합 $\Leftrightarrow$ A 가 상대위상 $\Im_A$ 에 관하여 연결집합

그러므로 연결성은 콤팩트성처럼(정리11.2) 집합의 절대적성질이다.

[예제3.1]

X가 비연결공간

$\Leftrightarrow$ X의 절단 (G, H)이 존재

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : (1) $G \neq \phi, H \neq \phi$

(2) $X \subset G \cup H,\ G \cap H \subset X^c$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ 개집합 G, H : (1) $G \neq \phi, H \neq \phi$

(2) $X = G \cup H,\ G \cap H = \phi$

[정리 13.4]

위상공간 X가 연결공간

$\Leftrightarrow$ X는 공집합 아닌 서로소인 개집합들의 합집합이 될 수 없다.(예제3.1)

$\Leftrightarrow$ 개집합이면서 동시에 폐집합인 집합인 진부분집합이 없다.

$\Leftrightarrow$ X, ϕ 가 개집합이면서 동시에 폐집합인 유일한 집합이다.

[예제3.2] 집합 $X=\{a,b,c,d,e\}$ **위에 위상**

$$\Im=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$ **이 주어졌다.**

X**는 비연결공간이다. 왜냐하면** $\{a\}^c=\{b,c,d,e\}$ **이므로** $\{a\}$ **는 공집합이 아니면서 개집합이면서 동시에 폐집합이기 때문이다. 즉 (**$\{a\}$**,**$\{b,c,d,e\}$**) 은** X**의 절단이다.** $A=\{b,d,e\}$ **위의 상대위상** $\Im_A=\{A,\phi,\{d\}\}$ **에서 개집합이면서 동시에 폐집합이 되는 것은** A**와** ϕ**밖에는 없다. 그러므로** A**는 연결공간이다. 또한** A**는** X**에서 연결집합이다.**

[예제3.3] 보통위상을 가진 실수공간은 연결공간이다. 왜냐하면 개집합 이면서 동시에 폐집합인 집합이 실수와 공집합밖에 없기 때문이다.

[정리 13.5] 연결집합의 연속함수의 상(image)도 연결집합이다.

(증명)

$f: X \to Y$ **를 연속함수라고 하고,** X**를 연결공간이라고 하자.**

$f[X]$**가 비연결공간**

$\Longrightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (1)**$G \neq \phi, H \neq \phi$ **(2)** $G \cap H = \phi$**,**

(3) $f[X] = G \cup H$

$\Longrightarrow$ f**가 연속함수이므로,** $f^{-1}[G], f^{-1}[H]$ **는 개집합,**

(1) $f^{-1}[G] \neq \phi$, $f^{-1}[H] \neq \phi$

(2) $f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = f^{-1}[G \cap H] = \phi$

(3) $f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H] = f^{-1}[G \cup H] = f^{-1}[f[X]] = X$

$\Longrightarrow$ X**가 비연결공간** ■

[보조정리 13.6]

위상공간 X가 연결공간

$\Leftrightarrow$ X에서 이산위상공간 $Y=\{0,1\}$으로 가는 연속함수는 상수함수.

(증명)

($\Longrightarrow$) $f: X \to Y=\{0,1\}$ **를 연속함수라고 하자.**

X**가 연결공간이면** $f[X]$**도 이산공간** Y**에서 연결집합이다. by정리13.5**

그러므로 $f[X]=\{0\}$ **또는** $f[X]=\{1\}$

($\Longleftarrow$) X**가 비연결공간**

$\Longrightarrow$ $\exists$ **개집합** G, H **: (1)** $G \neq \phi,\ H \neq \phi$

(2) $G \cap H = \phi,\ G \cup H = X$

$$\Longrightarrow \quad f(x)=\begin{cases} 0, \text{ if } x \in G \\ 1, \text{ if } x \in H \end{cases}$$

은 연속함수인데 상수함수가 아니다. ■

[정리 13.7]

E : 두 점 이상을 포함한 실수공간의 부분집합일 때,

E는 연결집합 $\Leftrightarrow$ E는 구간

(증명생략)

[정리 13.8]

X는 연결집합이고, $f : X \rightarrow \mathrm{R}$가 연속함수이면, f는 임의의 두 값 사이의 모든 값을 취한다.

(증명)

X가 연결집합이고 f가 연속함수이므로 $f(X)$도 연결집합인 실수공간의 부분집합이다. 따라서 $f(X)$는 구간이다. $f(X)$가 구간이면

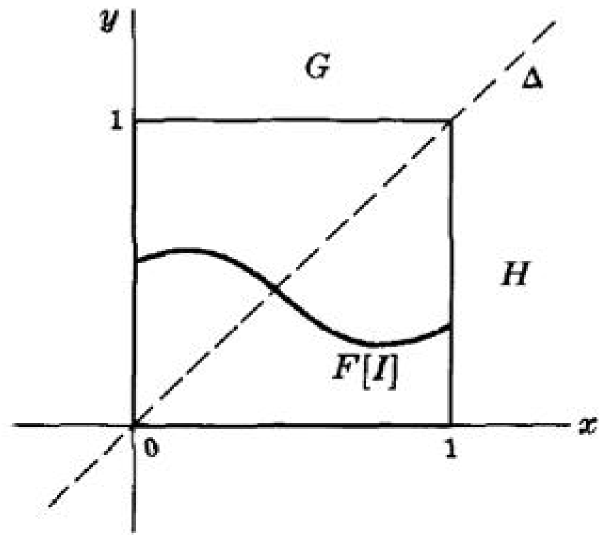
$y_{1,} y_2 \in f(X)$, $y_1 < y < y_2$ 라 하면 $y \in f(X)$ 이다.

즉 f는 임의의 두 값 사이의 모든 값을 취한다. ■

[예제4.1] **부동점존재정리**

$f: I \to I$ ($I = [0,1]$)**이 연속함수이면** $\exists p \in I : f(p) = p$

(증명)



$F: I \to \mathrm{R}^2, F(x) = (x, f(x))$ **도 연속임을 보이자.** R^2**의 임의의 기저원소**

$A = (a,b) \times (c,d)$**에 대하여,**

$$F^{-1}[A] = \{x \mid (x, f(x)) \in A\}$$
$$= \{x \mid a < x < b,\ c < f(x) < d\}$$
$$= \{x \mid a < x < b\} \cap \{x \mid c < f(x) < d\}$$
$$= (a,b) \cap f^{-1}[(c,d)]$$ **: 개집합**

그러므로 F **는 연속함수이다. 따라서** $F(I)$**는 연결집합이다.**

$G = \{(x,y) \mid x < y\}$, $H = \{(x,y) \mid y < x\}$**로 놓으면,** G, H**는** R^2**에서**

개집합들이고, $(0, f(0)) \in G$, $(1, f(1)) \in H$, $G \cap H = \phi \subset (F(I))^c$ **이다.**

따라서 만약 $F(I) \subset G \cup H$ **이라면, (G, H)는** $F(I)$ **의 절단이 되어**

$F(I)$ **가 연결집합이라는 사실에 어긋난다.**

그러므로 $F(I) \not\subset (G \cup H)$

$\Rightarrow \exists\, p \in I$ **:** $F(p) \notin G \cup H$

$\Rightarrow (p, f(p)) \notin (G \cup H)$ **(이유:** $F(p) = (p, f(p))$

$\Rightarrow$ **(** $p < f(p)$ **∨** $p > f(p)$ **) 이 아니다.**

$\Rightarrow p = f(p)$ ■

연결성분

E **가 위상공간** X **의 연결성분**

정의
$\Leftrightarrow$ **(** $E \subset A$ **이고** A **가 연결집합** $\Rightarrow$ $E = A$ **)**

$\Leftrightarrow$ E **는 극대연결집합. (주목: 연결성분은 공집합이 아니다)**

[문제#7] $\mathcal{A} = \{A_i\}$ **가** $D = \cap_i A_i \neq \phi$ **인 연결집합들의 족이면**

$A = \cup_i A_i$ **는 연결집합이다.**

(증명)

A **가 비연결집합**

$\Rightarrow$ $\exists$ **절단** **(**G, H**) of** A **:** $A \subset G \cup H$, $G \cap H \subset A^c$

$\Rightarrow$ $\forall i$, A_i**는 연결집합이므로,** $A_i \subset G$ or $A_i \subset H$ **, by [문제#4]**

$B = \cup\{A_i \mid A_i \subset G\}$**,** $C = \cup\{A_i \mid A_i \subset H\}$

$\Rightarrow$ $D \subset B \cap C$ **since** $D = \cap_i A_i$

$\Rightarrow$ $D \subset G \cap H$ **since** $B \subset G$, $C \subset H$

$\Rightarrow$ $D \subset A^c$ **since** $G \cap H \subset A^c$

$\Rightarrow$ $(\cap_i A_i) \subset (\cup_i A_i)^c$ **: 모순!!** **(주의:** $\cap_i A_i \neq \phi$ **)**

그러므로 A**는 연결집합이다.** ■

[문제#15] p354

위상공간 X에서, $p \in X$, $\mathcal{A}_p = \{A \mid p \in A$: 연결집합 $\}$일 때,

$C_p = \cup \mathcal{A}_p$ 는 X의 연결성분이다.

(증명)

1) $\phi \neq \{p\} \subset \cap \mathcal{A}_p$ 이므로 by문제#7, $C_p = \cup \mathcal{A}_p$ 는 연결집합이다.

2) D가 연결집합, $C_p \subset D$

$\Rightarrow$ **D가 연결집합, $p \in D$**

$\Rightarrow$ $D \in \mathcal{A}_p$

$\Rightarrow$ $D \subset C_p$ **(이유: $C_p = \cup \mathcal{A}_p$)**

$\Rightarrow$ $D = C_p$ **(이유: $C_p \subset D$)**

그러므로 C_p는 연결성분이다. ■

[정리13.9]

위상공간 X의 연결성분들은 X위에 분할을 만든다.

(증명)

C_p를 점 p를 포함한 모든 연결집합들의 합집합이라고 하자.

1) 집합족 $\{C_p \mid p \in X\}$는 모든 연결성분들의 집합이다. 왜냐하면

D : 연결성분 $\Rightarrow\ \exists p \in D\ \Rightarrow\ D \subset C_p$

$\Rightarrow\ C_p = D$ since D : 연결성분

2) $X = \cup \{C_p \mid p \in X\}$

3) $\exists x \in C_p \cap C_q\ \Rightarrow\ x \in C_p,\ x \in C_q$

$\Rightarrow\ C_p \subset C_x,\ C_q \subset C_x$

$\Rightarrow\ C_p = C_x,\ C_q = C_x$ (C_p, C_q:연결성분, C_x:연결집합)

$\Rightarrow\ C_p = C_q$

그러므로 $C_p \neq C_q\ \Rightarrow\ C_p \cap C_q = \phi$ ■

[예제5.1] X가 연결공간이면 X는 하나의 성분, 즉 자기 자신 X를 갖는다.

[예제5.2] $X=\{a,b,c,d,e\}$, $\mathfrak{I}=\{X,\phi,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$
일 때, X의 연결성분은 $\{a\}$와 $\{b,c,d,e\}$이다. $A=\{b,d,e\}$는 연결집합 (예제3.2참조)인데, 연결성분 $\{b,c,d,e\}$의 부분집합이다.

[문제#8] A가 연결집합이고 $A\subset B\subset \overline{A}$이면, B도 연결집합이다.

(증명) B가 비연결집합 $\Rightarrow$ B는 절단 (G,H)을 갖는다.

$\Rightarrow$ 1) $B\cap G\neq\phi$, $B\cap H\neq\phi$ (*), $(B\cap G)\cap(B\cap H)=\phi$

$\Rightarrow$ $(B\cap G)\cap H=\phi$ $\Rightarrow$ $(B\cap G)\subset H^c$ (**)

2) $(A\subset G \ \vee\ A\subset H)$, since ($A\subset G\cup H$, A가 연결집합)

a) $A\subset G \Rightarrow A\subset(B\cap G)$ by $A\subset B$

$\Rightarrow A\subset H^c$ by (**)

$\Rightarrow A\subset\overline{A}\subset H^c$ since H^c이 폐집합

$\Rightarrow B\subset H^c$ since $B\subset\overline{A}$

$\Rightarrow B\cap H=\phi$: 모순 to (*)

b) $A\subset H \Rightarrow$ 비슷하게 모순!! ■

[문제#14] 모든 연결성분은 폐집합이다.

(증명) E**를 연결성분이라 하자.**

E**는 연결집합이므로 [문제#8]에 의하여** $\overline{E}$**도 연결집합이다.**

$E \subset \overline{E}$ **이고** E**는 연결성분(극대연결집합)이므로** $E = \overline{E}$**이다.** ■

[문제#17] X, Y**가 연결공간이면** $X \times Y$ **도 연결공간이다.**

($\Rightarrow$ 연결공간들의 모든 유한개 적공간도 연결공간이다.)

(증명)

$p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$**를** $X \times Y$**의 임의의 두 점이라고 하자.**

$\{x_1\} \times Y$**는** Y**와 위상동형이므로 연결공간이다. 마찬가지로** $X \times \{y_2\}$ **도 연결공간이다. 그런데** $(\{x_1\} \times Y) \cap (X \times \{y_2\}) = \{(x_1, y_2)\} \neq \phi$ **이므로, by [문제#7],** $(\{x_1\} \times Y) \cup (X \times \{y_2\})$ **은 연결집합이다. 따라서** p, q**는 한 연결성분 안에 있다. 그러므로** $X \times Y$**는 연결집합이다.** ■

[정리13.10] 연결공간의 적공간은 역시 연결공간이다.

(증명) $\{X_i \mid i \in I\}$ 는 적공간들의 족이라 하고 $X = \Pi_i X_i$ 라 하자.

$p = < p_i : i \in I > \in X$ 이고 E_p 를 p 의 연결성분이라고 하자.

$\forall x = < x_i : i \in I > \in X$,

$x \in {}^{\forall} G = G_{i_1} \times \cdots G_{i_m} \times \Pi\{X_i \mid i \neq i_1, i_2, \cdots, i_m\}$: 기저 개집합,

$H = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m} \times < p_i : i \neq i_1, i_2, \cdots, i_m >$ 는

$X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_m}$ 와 위상동형이므로 문제#17에 의하여

연결집합이다. $p \in H$ 이므로 연결집합 $H \subset E_p$(연결성분)

그런데 $G \cap H \neq \phi$ 이므로 $G \cap E_p \neq \phi$ 이다.

그러므로 $x \in {}^{\forall} G$: 기저 개집합, $G \cap E_p \neq \phi$ 이다. 즉 $x \in \overline{E_p}$.

결론적으로 $\forall x \in X, x \in \overline{E_p}$. 이것은 $X = \overline{E_p}$ 을 의미하는데,

(By 문제#14, $E_p = \overline{E_p}$) 이므로 $X = E_p$ 이다. 즉 X는 연결공간이다. ■

[따름정리13.11] 유클리드공간 R^m 은 연결공간이다.

위상공간 위의 경로

$I = [0,1] \subset \mathrm{R}$이고, X가 위상공간, $a, b \in X$일 때,

$f : I \to X$ 는 a에서 b로 가는 **경로**이다.

정의

$\Leftrightarrow f$가 연속함수이고, $f(0) = a,\ f(1) = b$

[예제7.1] f가 **상수함수**이면 **상수경로**라고 한다.

[예제7.2] $f : I \to X$가 $a \in X$에서 $b \in X$로 가는 경로이면

$\hat{f} : I \to X,\ \hat{f}(s) = f(1-s)$ 는 b에서 a로 가는 경로이다.

[예제7.3] $f : I \to X$가 a에서 b로 가는 경로이고, $g : I \to X$가 b에서 c로 가는 경로일 때, 다음과 같이 정의되는

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & ,\ 0 \le s \le 1/2 \\ g(2s-1), & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

$f * g : I \to X$ 는 a에서 c로 가는 경로이다.

경로연결집합

위상공간 X 안의 집합 E 는 경로연결집합이다.

정의

$\Leftrightarrow \forall a,b \in E,\ \exists$ **(**a **에서** b **로 가는 경로)** $f : I \to X\ :\ f[I] \subset E$

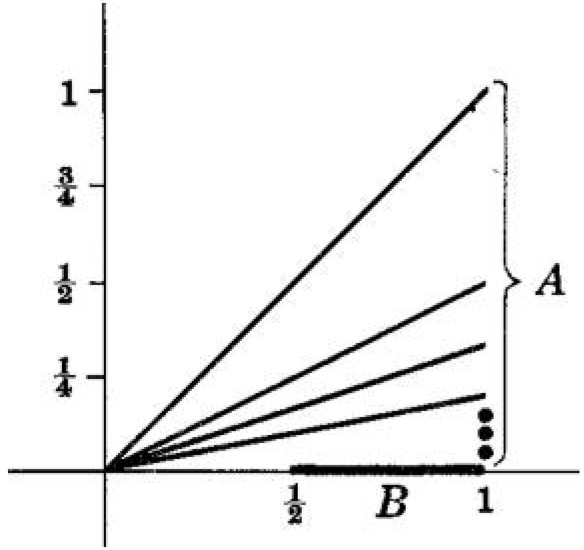
[정리13.12] 경로연결집합은 연결집합이다.

(증명)

A **를 경로연결집합이라고 하자. 만약** $A = \phi$ **이라면** A **는 연결집합이다.**
$p \in A$ **라고 하자.** $\forall a \in A,\ \exists$ **(**p **에서** a **로 가는 경로)** $f_a : I \to A$ **이므로**
$a \in f_a(I) \subset A$. **그러므로** $A = \cup \{f_a(I) \mid a \in A\}$ **이다. 그런데**
$\forall a \in A,\ p \in f_a[I]$ **이다. 따라서** $\cap \{f_a(I) \mid a \in A\} \supset \{p\} \neq \phi$**. 한편**
I **가 연결집합이고** f_a **는 연속함수이므로,** $f_a(I)$ **은 연결집합이다.**
By 문제#7, $A = \cup \{f_a(I) | a \in A\}$ **는 연결집합이다.** ■

위 정리의 역이 성립하지 않는 예는 다음과 같다.

[예제8.1] 평면 R^2 의 부분집합들



$$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ y = x/n,\ n \in \mathrm{N}\}$$

$$B = \left\{(x,0) \mid \frac{1}{2} \le x \le 1\right\}$$

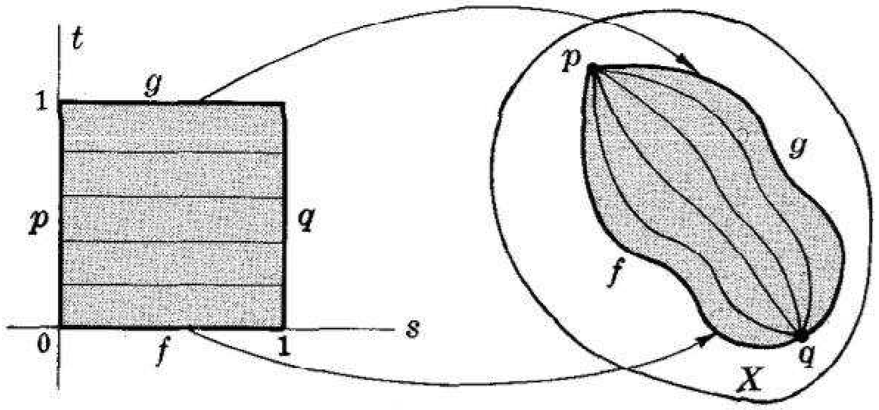
에서, A, B **는 경로연결 집합들이다. 그러므로 연결집합들이다.** $B \subset \overline{A}$ **이므로** A, B **는 분리된 집합이 아니다. 그러므로** $A \cup B$ **는 연결집합이다.**

그런데 A **의 어떤 점에서도** B **로 가는 경로를 만들 수 없으므로** $A \cup B$ **는 경로연결집합이 아니다.**

호모토픽 경로

경로 $f: I \to X$ (위상공간)는 경로 $g: I \to X$ 와 **호모토픽**하다.

($f \simeq g$ 로 표시)



정의
$\Leftrightarrow$ ∃ 연속함수 $H: I^2 \to X$:

$$H(0,t) = p,\ H(1,t) = q$$

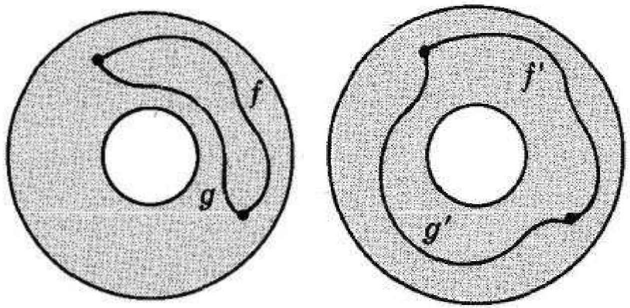
$$H(s,0) = f(s),\ H(s,1) = g(s)$$

여기에서 함수 H 를 f 에서 g 로의 **호모토피**라고 한다.

[예제 9.1] X 를 두 동심원 사이의 영역이라고 하자.

왼쪽 그림에서 f 와 g 는 호모토픽하지만

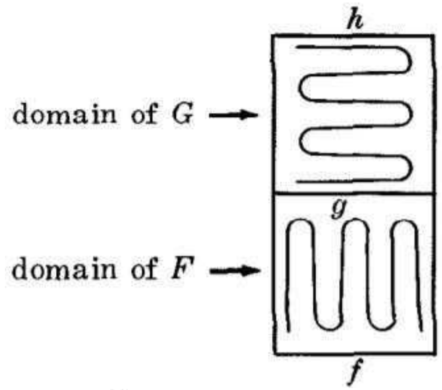
오른쪽 그림에서 f' 와 g' 는 호모토픽하지않다.



[예제 9.2] 임의의 경로 $f: I \to X$ 에서, $f \simeq f$ 이다.

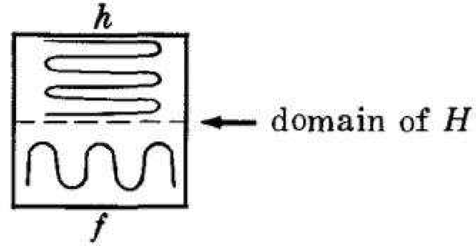
왜냐하면 $H(s,t) = f(s)$ 는 f 에서 f 로 가는 호모토피이기 때문이다.

[예제 9.3] $f \simeq g$ 이면 f 에서 g 로의 어떤 호모토피 $H: I^2 \to X$ 가 존재한다. 그 때 $\widehat{H}(s,t) = H(s, 1-t)$ 는 g 에서 f 로의 호모토피가 된다. 그러므로 $g \simeq f$ 가 성립한다.



[예제 9.4] $f \simeq g$, $g \simeq h$ 이면 f 에서 g 로의 호모토피 F 와 g 에서 h 로의 호모토피 G 가 존재한다. 그 때

$$\begin{aligned} H(s,t) &= F(s,2t) & \text{if } 0 \le t \le 1/2 \\ &= G(s,2t-1) & \text{if } 1/2 \le t \le 1 \end{aligned}$$



는 f 에서 h 로의 호모토피이다. 그러므로 $f \simeq h$ 이다.

[명제13.14] 한 점 a에서 다른 점 b로 가는 모든 경로들의 집합에서 호모토픽 관계는 동치관계이다.

(증명) 예제9.2 반사율, 예제9.3 대칭율, 예제9.4 추이율

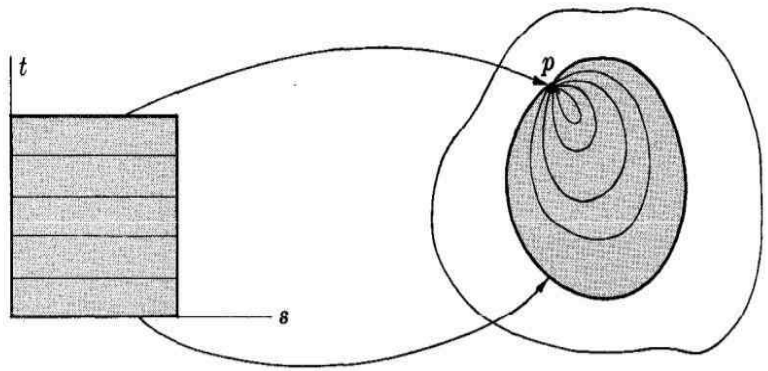
닫힌경로

경로 $f: I \to X$는 p에서의 닫힌경로이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad f(0) = f(1) = p$$

한점으로축소가능한경로

닫힌경로 $f: I \to X$는 한점으로축소가능한 경로이다.



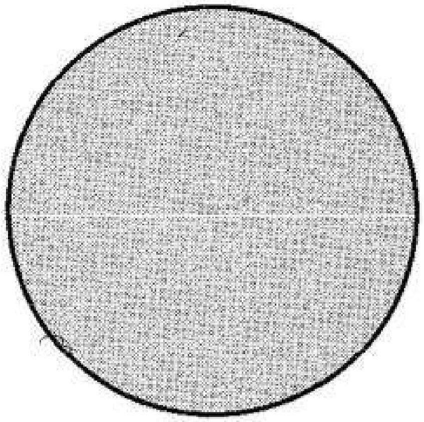
$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **닫힌경로 f가 상수경로와 호모토픽하다.**

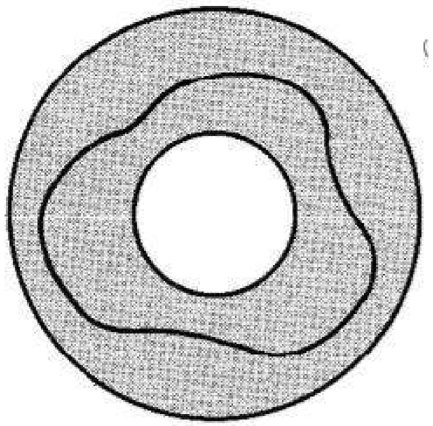
단순연결공간

위상공간 X는 단순연결공간이다.

정의
$\Leftrightarrow$ X위의 모든 닫힌경로가 한점으로축소가능한다.

[예제 10.1] 평면 R^2 위의 원반은 단순연결공간이지만 환은 한점으로 축소되지 않은 닫힌 경로가 존재하므로 단순연결공간이 아니다.





원반: 단순연결공간(o)　　환: 단순연결공간(x)

제14장 완비거리공간(Complete Metric Space)

코시열

거리공간 X의 점열$< a_1, a_2, \cdots >$은 **코시열**이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \epsilon > 0, \exists n_0 : (n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon)$$

[명제14.1] 거리공간에서 모든 수렴열은 코시열이다.

(증명)

점열$< a_n >$ 이 p로 수렴한다면, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(a_n, p) < \varepsilon/2)$$

그러면,

$$\begin{aligned} n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) &\leqq d(a_n, p) + d(a_m, p) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned} \qquad ■$$

위 역은 다음 예제처럼 성립하지 않는다.

[예제1.2] 개구간 $X=(0,1)$을 보통거리를 갖는 거리공간이라 하자.

점열$<\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots>$ 은 X에서 코시열이지만, X내의 점으로 수렴하지는 않는다.

[예제1.3] 어떤 집합 X위에 자명거리 d가

$$d(a,b)=\begin{cases}0 & \text{if } a=b \\ 1 & \text{if } a\neq b\end{cases}$$

와 같이 주어지고, 점열$< a_n >$ 이 코시열이라면

$$< a_n >=< a_1,a_2,\cdots,a_n,p,p,\cdots>$$

일 수밖에 없다. 왜냐하면 코시 조건에서 $\varepsilon=\frac{1}{2}$로 잡으면

$$\exists\, n_0\in \mathrm{N} : (\,n,m>n_0 \Rightarrow d(a_n,a_m)<\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow a_n=a_m$$

■

[예제1.4] 유클리드공간에서 코시열 $< p_1, p_2, \cdots >$ **, 예를 들어,**

$$p_1 = < a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(m)} > , \; p_2 = < a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(m)} > , \; \cdots$$

이라면, 점열$< p_n >$ **의 각 좌표 공간으로의 사영들**

$$< a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots > , \; \cdots , \; < a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \cdots >$$

도 코시열이 된다. 왜냐하면 $\forall \varepsilon > 0, < p_n >$ **은 코시열이므로,**

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \; (r, s > n_0 \Rightarrow d(p_r, p_s) < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Sigma_{i=1}^{m} |a_r^{(i)} - a_s^{(i)}|^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_r^{(j)} - a_s^{(j)}| \le \sqrt{\Sigma_{i=1}^{m} |a_r^{(i)} - a_s^{(i)}|^2} < \varepsilon, \; ^{\forall} j$$

그러므로 점열$< a_n^{(j)} >$, $^{\forall} j = 1, 2, \cdots, m$**도 코시열이다.** ■

완비거리공간

거리공간 (X,d) 는 완비하다. 또는 완비거리공간이다.

정의
$\Leftrightarrow$ **X안의 모든 코시열이 X안의 한 점으로 수렴한다.**

[예제2.1] 보통거리를 갖는 실수집합 $\mathbb{R}$ 은 완비하다.

[예제2.2] d가 어떤 집합 X상의 자명거리라고 하자. 예제1.3에 의하면, (X,d)위에서 모든 코시열은 $< a_1, a_2, \cdots, a_n, p, p, p, \cdots >$ 형식이므로 X안의 한점으로 수렴하므로, (X,d)는 완비거리공간이다.

[예제2.3] 보통거리를 갖는 단위개구간 $X = (0,1)$은 X안의 점열 $< \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots >$ 은 코시열인데 X안의 점으로 수렴하지 않으므로, 완비공간이 아니다.

[예제2.4] 유클리드공간 $\mathbb{R}^m$ 은 완비공간이다. (숙제)

[문제#2] $< a_i >$ **가 거리공간** X **안의 점열이고,**

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots \}, A_2 = \{a_2, a_3, \cdots \}, \cdots$$

라고 하면, $< a_i >$ **가 코시열** $\Leftrightarrow d(A_i) \to 0$

(증명)

($\Rightarrow$ **)** $< a_i >$ **가 코시열**

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon/2)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : ((n > n_0, a_m \in A_n) \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon/2)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (n > n_0 \Rightarrow d(A_n) < \varepsilon)$

$\Rightarrow d(A_i) \to 0$

($\Leftarrow$ **)** $d(A_i) \to 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : (d(A_{n_0+1}) < \varepsilon)$**, 따라서,**

$$(n, m > n_0 \Rightarrow a_n, a_m \in A_{n_0+1} \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

$\Rightarrow < a_i >$ **가 코시열** ■

축소집합열

집합열 $< A_1, A_2, \cdots >$ 은 축소집합열이다.

정의
$\Leftrightarrow \ A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ \cdots$

[정리14.2] 축소폐집합열의 정리

거리공간 X가 완비하다

$\Leftrightarrow$지름이 0으로 수렴하는, 공집합 아닌 폐집합의 축소열들의 교집합은 공집합이 아니다.

[증명]

($\Rightarrow$) $< A_i >$ 을 지름이 0으로 수렴하는 공집합 아닌 폐집합의 축소열이라고 하자. $A_i \neq \phi$이므로

$$\exists < a_i >: a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, \cdots$$

$d(A_i) \to 0$ **이므로**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathrm{N} : d(A_{n_0}) < \varepsilon$$

$< A_i >$ **이 축소열이므로,**

$$\begin{aligned} n, m > n_0 \;&\Rightarrow\; A_n, A_m \subset A_{n_0} \\ &\Rightarrow\; a_n, a_m \in A_{n_0} \\ &\Rightarrow\; d(a_n, a_m) < \varepsilon \end{aligned}$$

따라서 $< a_i >$ **는 코시열이다.** X**가 완비이므로** $\exists p \in X : a_i \to p$ **이다.**

$p \notin \cap_i A_i$ **이라고 가정하면,** $\exists k \in \mathrm{N}, p \notin A_k$ **이다.** A_k**가 폐집합이므로**

$\exists \delta > 0 : d(p, A_k) = \delta$ **이다. 그러므로**

$$\begin{aligned} i > k &\Rightarrow a_i \in A_i \\ &\Rightarrow a_i \notin S(p, \delta/2) \end{aligned}$$

이것은 $a_i \to p$ **에 모순이다. 그러므로** $p \in \cap_i A_i$ **이다.**

($\Leftarrow$) $< a_i >$ **를 거리공간** X **안의 코시열이라고 가정하자.**

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots\},\ A_2 = \{a_2, a_3, \cdots\},\ \cdots$$

로 놓으면 $< A_i >$ **는 축소집합열이고, By문제#2,** $d(A_i) \to 0$ **이다.**

폐포들의 열 $< \overline{A_i} >$ **도 축소집합열이고,** $d(\overline{A_i}) = d(A_i) \to 0$ **이다.**

가정에 의하여 $\cap_i \overline{A_i} \neq \phi$ **이다. 그러므로** $\exists\, p \in \cap_i \overline{A_i}$ **이다.**

$d(\overline{A_i}) \to 0$ **이므로,**

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathrm{N}:\ (\ d(\overline{A_{n_0}}) < \varepsilon\ ),$$ **따라서,**

$$(\ n > n_0\ \Rightarrow\ a_n \in A_n \subset A_{n_0},\ p \in \overline{A_{n_0}}$$

$$\Rightarrow\ d(a_n, p) < \varepsilon\ )$$

그러므로 $a_n \to p$ ■

[예제 3.1] 실수공간 R은 완비공간이다. $A_n = [n, \infty)$라 하면, $< A_n >$은 축소폐집합열이다. 그런데 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$이다. 그러므로 $d(A_n) \rightarrow 0$ 이 될 수가 없다.

[예제 3.2] 실수공간 R은 완비공간이다. $A_n = (0, \frac{1}{n}]$라 하면, $< A_n >$은 축소집합열이고, $d(A_n) \rightarrow 0$ 이다. 그런데 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$이다. 그러므로 A_n는 폐집합이 될 수 없다.

축소사상

함수 $f : X \rightarrow X$ 는 축소사상이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad \exists\, \alpha : 0 \le \alpha < 1, \forall\, p, q \in X,\ d(f(p), f(q)) \le \alpha\, d(p,q) < d(p,q)$$

[정리 14.3] 부동점 정리

X가 완비공간이고, $f : X \rightarrow X$가 축소사상이면 $\exists\, p \in X : f(p) = p$이다.

완비화

거리공간 X^* 는 거리공간 X의 완비화이다.

정의
$\Leftrightarrow$ X가 X^* 의 조밀부분집합과 거리동형이다.

[예제 5.1] 실수공간 R은 유리수공간 Q의 완비화이다. 왜냐하면, R은 완비공간이고, $\overline{\mathrm{Q}} = \mathrm{R}$이기 때문이다.

완비화 방법

거리공간 X위의 모든 코시열들의 집합을 $C[X]$라 하자. 그러면

$$< a_n > \sim < b_n > \ \Leftrightarrow \ d(a_n, b_n) \to 0$$

로 정의되는 관계 $\sim$ 는 $C[X]$위의 동치관계이다. 몫집합 $X^* \equiv (C[X]/\sim)$위에 거리 함수를

$$e(< a_n >, < b_n >) = \lim_{n \to \infty} d(a_n, b_n)$$

로 정의하면 함수 e는 X^* 위에 잘 정의된 거리임을 보일 수 있다.

또한 X는 X^* 안에 조밀한 집합과 거리동형임을 보일 수 있다. 즉 X^*는 X의 완비화가 된다. 더불어 모든 완비화들은 서로 거리동형이다.

[예제] 실수집합은 유리수집합의 완비화로 정의될 수 있다. 즉

$$\mathrm{R} = \{ < a_n > \mid < a_n > \text{는 } \mathrm{Q} \text{ 안의 코시열} \} \qquad \blacksquare$$

조밀한 곳이 없다(nowhere dense)

위상공간의 부분집합 A는 조밀한 곳이 없다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad (\overline{A})^o = \phi$$

위상공간의 부분집합 A는 조밀한 곳이 있다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad (\overline{A})^o \neq \phi$$

[예제 6.1]

(1) 정수집합 Z는 실수공간 R에서 조밀한 곳이 없는 부분집합이다.

왜냐하면 $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}$ 이므로 $(\overline{\mathrm{Z}})^{\mathrm{o}} = (\mathrm{Z})^{\mathrm{o}} = \phi$ 이기 때문이다.

(2) 실수공간 R 의 모든 유한부분집합은 (1)에서 처럼 조밀한 곳이 없다.

(3) 유리수집합 Q 는 실수공간 R 에서 조밀한 곳이 있는 부분집합이다.

왜냐하면 $(\overline{\mathrm{Q}})^{\mathrm{o}} = (\mathrm{R})^{\mathrm{o}} = \mathrm{R} \neq \phi$ 이기 때문이다. ■

제1범주, 제2범주

위상공간 X 는 **제1범주**에 속한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ X 는 가산개의, 조밀한 곳이 없는 부분집합들의, 합집합이다.

위상공간 X 는 **제2범주**에 속한다.

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ X 는 가산개의, 조밀한 곳이 없는 부분집합들의, 합집합이 아니다.

[정리 14.11]

완비거리공간은 제2범주에 속한다. (증명생략)

[문제#4] 코시열의 부분열이 한 점 p로 수렴하면, 코시열도 p로 수렴한다.

(증명)

코시열 $< a_n >$ **의 부분열** $< a_{n_i} >$ **이** p**로 수렴한다고 가정하자.**

$\forall\, \varepsilon > 0$ **,** $\exists\, i_0 \in \mathrm{N}: (\, i > i_0 \Rightarrow d(a_{n_i}, p) < \varepsilon/2\,)$ **by** $a_{n_i} \to p$**.**

$\exists\, n_0 \in \mathrm{N}: (\, n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon/2\,)$ **by 코시열.**

여기에서 $\exists\, i > i_0 : m = n_i > n_0$ **이다.**

그러므로 $d(a_n, p) \le d(a_n, a_m) + d(a_{n_i}, p)$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

그러므로 점열 $< a_n >$ **은** p**로 수렴한다.** ■

[정리 14.12]

거리공간 X**는 콤팩트이다.**

$\Leftrightarrow$ X**는 완전유계이고, 완비공간이다.**

(증명)

($\Longrightarrow$)

(1) [정리 11.14]에 의하면 X가 콤팩트이면 점열콤팩트이고, [보조정리 11.17]에 의하며 점열콤팩트이면 완전유계이다.

(2) 임의의 코시열이 있다면, 그 점열은 점열콤팩트공간에서는 수렴하는 부분열을 갖는다. 그런데 By [문제#4], 코시열은 수렴하는 부분열의 극한으로 수렴한다. 코시열이 수렴하므로 완비공간이다.

($\Longleftarrow$)

점열$< a_i >$ 이 X 안에 있다고 하자. X가 완전유계이면,

by [명제 11.15], 지름이 $\varepsilon_1 = 1$보다 작은 유한 개의 부분집합으로 분할 할 수 있고, 그 부분집합들 중에 점열$< a_i >$의 무한 개의 항을 포함하는 집합 (예를 들어 A_1)이 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\exists\, i_1 \in \mathrm{N} : a_{i_1} \in A_1$$

이다. 그런데 A_1 도 완전유계이므로, 지름이 $\varepsilon_1 = 1/2$ 보다 작은 유한 개의 부분집합으로 분할 할 수 있고 그 부분집합들 중에 점열 $< a_i >$의 무한 개의 항을 포함하는 집합 (예를 들어 A_2)이 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$\exists\, i_2 \in \mathrm{N} : (a_{i_2} \in A_2 \,,\, i_2 > i_1)$$

이다. 여기서 $A_1 \supset A_2$ 이다. 이런 방법으로 계속하면, $d(A_n) < 1/n$ 인 축소집합열

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ \cdots$$

과 $a_{i_n} \in A_n$ 인 $< a_i >$ 의 부분열 $< a_{i_n} >$ 을 얻는다. 그래서

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ ,\ \exists\, n' \in \mathrm{N} : \, d(A_{n'}) < 1/n' < \varepsilon$$

그러므로,

$$\begin{aligned} n, m > n' \ &\Rightarrow i_n, i_m > i_{n'} \\ &\Rightarrow a_{i_n}, a_{i_m} \in A_{n'} \\ &\Rightarrow \ d(a_{i_n}, a_{i_m}) < 1/n' < \varepsilon \end{aligned}$$

따라서, $< a_{i_n} >$ 은 코시열이다. 그런데 X가 완비공간이므로, 코시열 $< a_{i_n} >$ 은 수렴한다. X안의 임의의 수열 $< a_i >$ 이 수렴하는 부분열을 가지므로 X는 점열콤팩트이다. By [정리 11.14], 점열콤팩트이면 콤팩트이다. ■

[정리 14.13]

집합 A가 완비거리공간 X의 부분집합일 때,

A는 콤팩트 $\Leftrightarrow$ (A는 완전유계이고, 폐집합이다.)

($\Longrightarrow$)

By [정리 11.5], A가 콤팩트집합이면 A는 폐집합이다.

By [정리 11.14], A가 콤팩트이면 점열콤팩트이고,

By [보조정리 11.17], 점열콤팩트이면 완전유계이다.

($\Longleftarrow$)

A위의 임의의 코시열은 X위의 코시열이고, X가 완비이므로, X위의 어떤 점으로 수렴한다. A가 폐집합이면 A위의 점열의 극한을 포함한다. 그러므로 A도 완비공간이 된다. 더불어 A가 완전유계이라면, By [정리 14.12], A는 콤팩트가 된다. ■