6장 원운동, 궤도 및 중력

CONTENTS

학습 목표

- 중력이 작용하는 궤도 운동을 포함하여, 원운동에 관하여 배운다.

학습 목표

원운동

- 원운동을 하는 물체는 원의 중심을 향하는 가속도를 갖기 때문에 이 가속도를 일으키는 방향으로 알짜힘이 있어야만 한다.

걸보기힘

- 타고 있는 사람은 밖으로 튕겨지는 것을 느낄 것이다.
- 이 힘을 원심력이라고 하지만 이것은 실제 힘이 아니다.

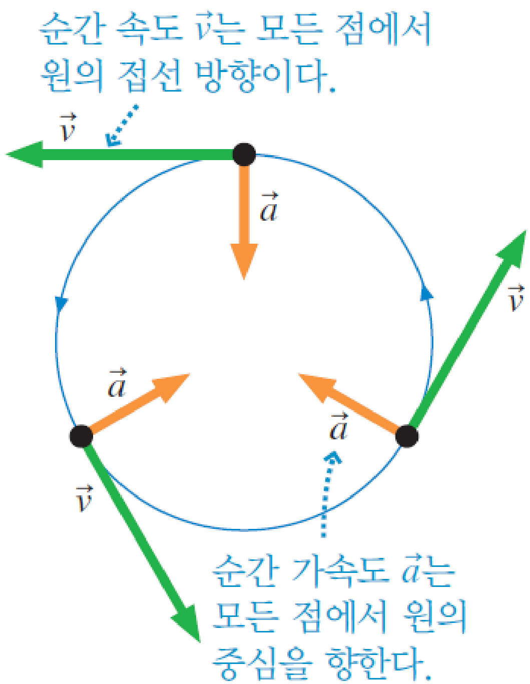
중력과 궤도

- 우주 정거장은 공간에 떠 있는 것처럼 보이지만, 중력이 우주 정거장을 강력하게 아래로 잡아당기고 있다.

6.1 등속 원운동

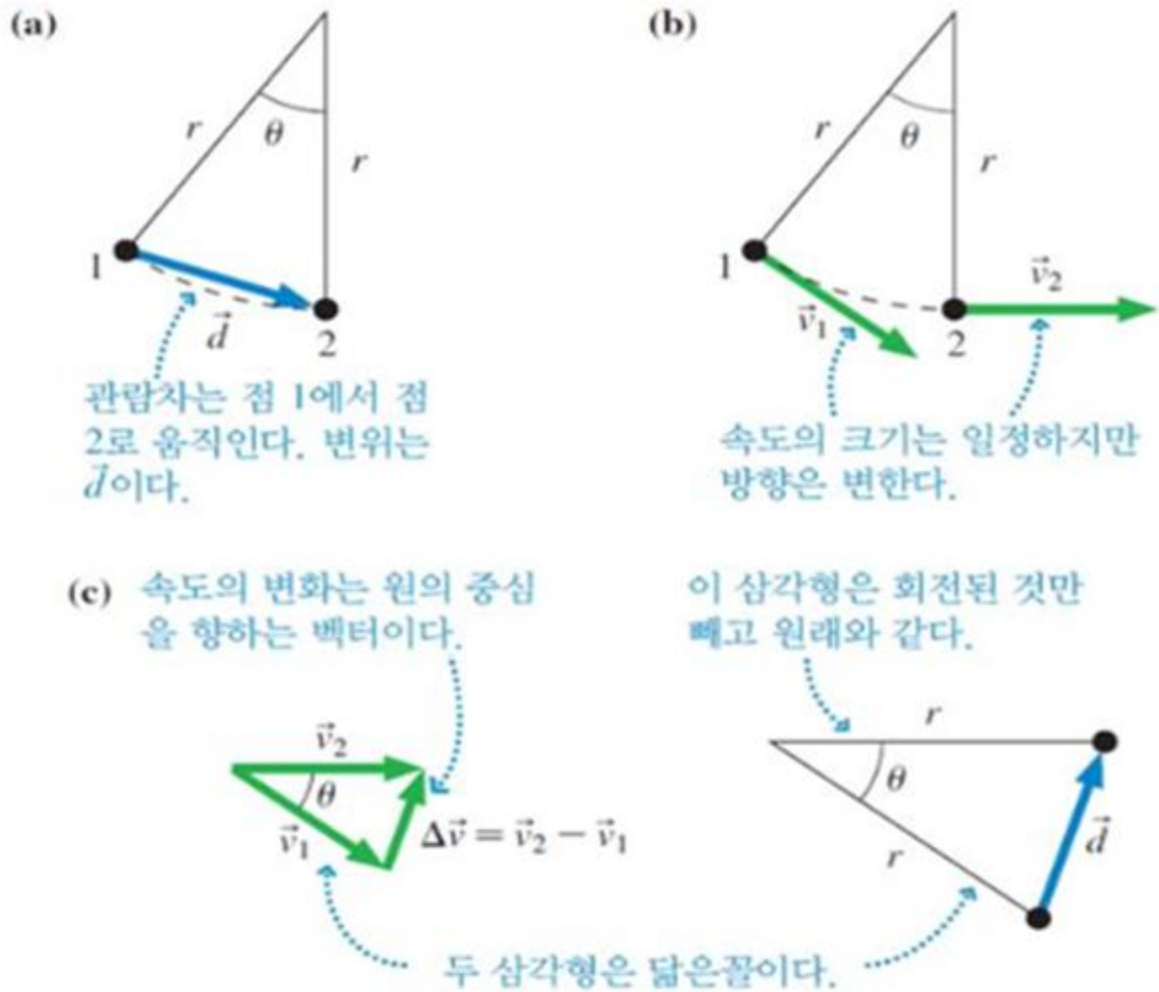
등속 원운동의 속도와 가속도

- 등속 원운동하는 물체의 속력은 일정하지만 속도는 일정하지 않음
- 운동의 방향이 항상 바뀌기 때문



$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (6.1)$$

등속 원운동의 구심력

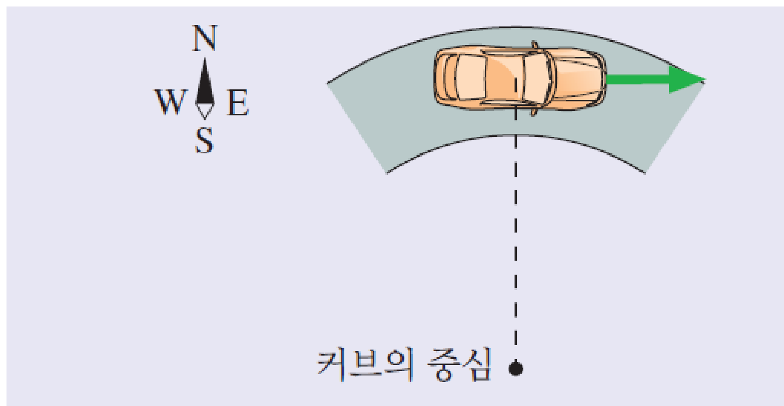


등속원운동의 가속력

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{d}{r} \Longrightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \Longrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \Longrightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

개념형 예제 6.1

자동차가 일정한 속력으로 급격하게 커브길을 돌고 있다. 그림 6.2는 위에서 본 그림이다. 자동차의 순간 속도는 동쪽 방향이다. 가속도의 방향은 어느 쪽인가?



판단

차가 진행하는 경로는 원의 일부분이므로 이것은 등속 원운동의 예이다.

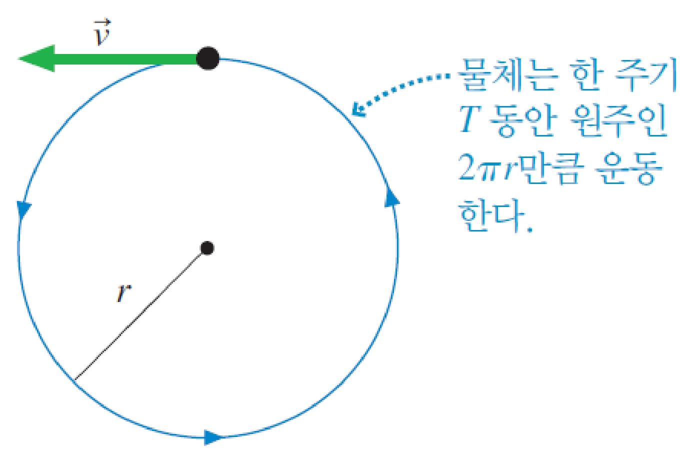
등속 원운동의 경우 가속도는 원의 중심, 즉 남쪽으로 향한다.

주기, 진동수 그리고 속력

- 운동의 주기 — 물체가 원을 한 바퀴 돌아서 1회전을 완료하는 데 걸리는 시간
- T라는 기호로 나타냄
- 1번 회전하는 데 걸리는 시간 대신 초당 회전수인 진동수로 원운동을 기술할 수도 있음
  → 기호 f

$$f = \frac{1}{T} \qquad (6.2)$$

- 진동수의 SI 단위는 시간의 역수, 곧 s^{-1}



주기, 진동수 그리고 속력

- 물체의 진동수와 속력을 연관시켜주는 식

$$v = 2\pi r f \tag{6.3}$$

- 진동수와 주기에 관한 식 (6.2) 으로부터

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{6.4}$$

- 이 식과 가속도에 관한 식 (6.1)을 결합하면 원운동의 구심 가속도를 진동수나 주기를 사용하여 나타낸 표현을 얻을 수 있음

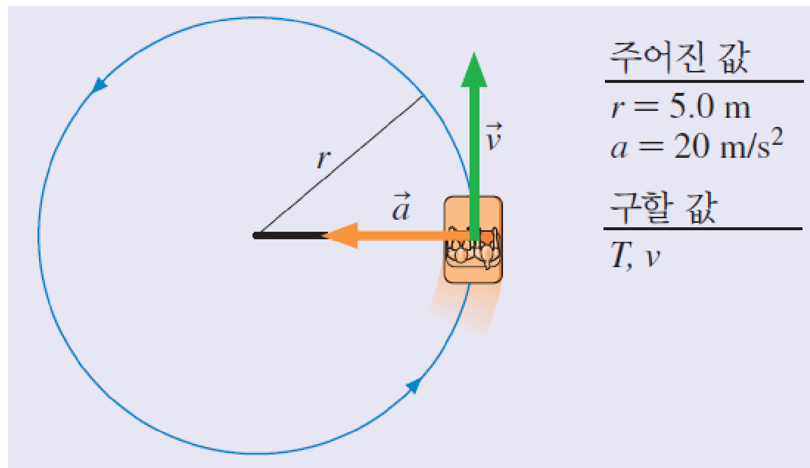
$$a = \frac{v^2}{r} = (2\pi f)^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \tag{6.5}$$

예제 6.3

축제 놀이기구를 탄 승객들은 반지름 5.0 m의 원을 수평으로 회전한다. 이 기구의 안전한 작동을 위하여 놀이기구가 최대로 견딜 수 있는 가속도는 자유 낙하 가속도의 약 두 배인 20 m/s^{2}이다. 놀이기구가 최대 가속도로 작동할 때 회전 주기는 얼마인가? 놀이기구가 이 주기로 작동할 때 승객은 얼마나 빠르게 움직이는가?

준비

- 놀이기구는 등속 원운동을 한다고 가정한다.
- 그림 6.4의 개요도는 놀이기구의 운동을 위에서 바라본 그림이다.



$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{ar} = \sqrt{20\,m/s^2 \times 5.0\,m} = 10\,m/s$$

$$v = 2\pi r f = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 5.0\,m/s}{10\,m/s} = \pi$$

예제 6.3 ... 풀이

식 (6.5)는 주기가 감소하면 가속도가 증가한다는 것을 나타낸다.
놀이기구가 더 짧은 시간 동안에 원 궤도를 돈다면 가속도는 증가한다.
최대 가속도는 놀이기구가 안전하게 운행할 최소 주기를 의미한다.
식 (6.5)를 다시 정리하여 주기를 가속도로 나타내자. 가속도에 최댓값을 대입하면
최소 주기를 얻는다.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{5.0\text{ m}}{20\text{ m/s}^2}} = 3.1\text{ s}$$

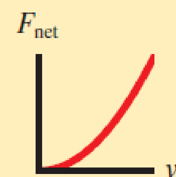
식 (6.4)를 사용하면 놀이기구의 속력을 구할 수 있다.

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(5.0\text{ m})}{3.1\text{ s}} = 10\text{ m/s}$$

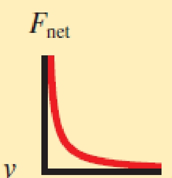
6.2 등속 원운동의 동역학

- 회전하는 축제 놀이기구를 탄 탑승자들이 가속되고 있음
- 뉴턴의 제2법칙은 알짜힘이 이 가속도를 일으키는 원인임을 말해줌

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} = \left(\frac{mv^2}{r}, \text{ 원의 중심을 향함}\right) \qquad (6.6)$$



이차 관계

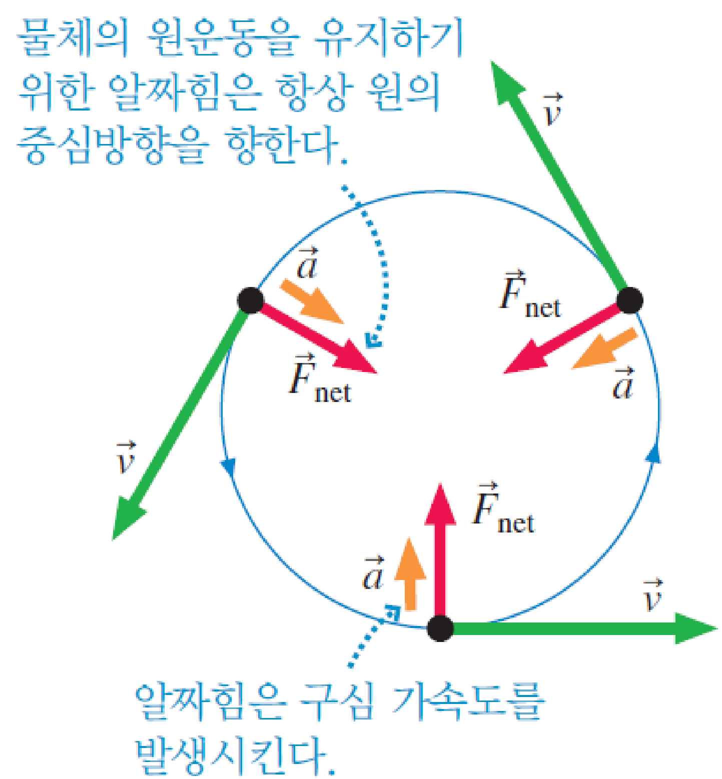


반비례

등속 원운동에서 구심 가속도를 만드는 알짜힘

6.2 등속 원운동의 동역학

- 반지름이 r인 원 주위를 일정한 속력 v로 원운동을 하는 질량 m의 입자는 항상 원의 중심을 향하여 크기 mv^2/r인 알짜힘을 가져야 함
- 식 (6.6)으로 주어지는 힘은 새로운 종류의 힘은 아니다.
- 이 알짜힘은 장력, 마찰력, 또는 수직항력과 같은 하나 또는 그 이상의 유사한 힘들에 기인한 것



개념형 예제 6.4

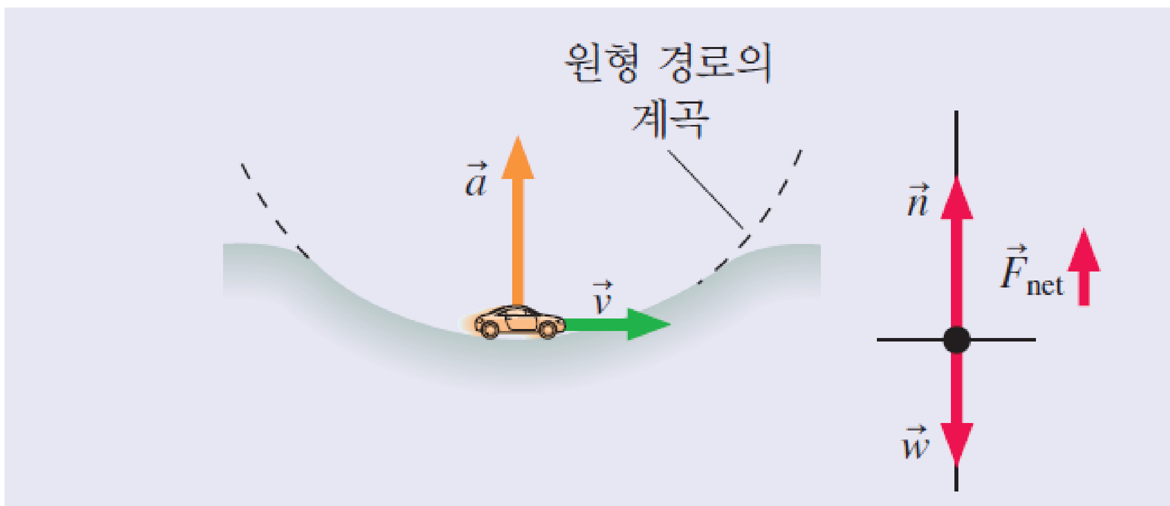
공학자들은 커브길을 원의 일부가 되게 설계한다. 그들은 또 계곡길이나 언덕길도 예상되는 속력이나 다른 인자들에 의존하는 반지름을 가지는 원의 일부로 설계한다. 자동차가 일정한 속력을 가지고 계곡길을 움직이고 있다. 길의 밑바닥에서 자동차에 작용하는 수직 항력은 자동차의 무게보다 더 큰가? 더 작은가? 아니면 같은가?

준비

- 그림 6.6은 주어진 문제의 상황을 나타낸 개요도이다. 등속으로 자동차가 운동한다고 해도 속도의 방향이 변화하기 때문에 자동차는 가속되고 있다.
- 자동차가 계곡 바닥에 이르면 원형 경로의 중심이 자동차의 위쪽에 있게 되어 가속도 벡터는 자동차 바로 위쪽을 향하게 된다.
- 그림 6.6의 자유 물체 도형에는 자동차의 위쪽을 향하는 수직 항력과 아래 방향으로 향하는 자동차의 무게를 나타내는 두 힘만 그려져 있다.
- 수직 항력 n과 무게 w 중 어느쪽이 더 큰가?

개념형 예제 6.4 ... 준비 계속

- 가속도가 자동차의 위 방향을 향하고 있기 때문에 뉴턴의 제2법칙에 의해 위 방향으로 향하는 알짜힘이 있어야 한다.
- 이러한 사실로부터 자유 물체 도형에서는 수직 항력의 크기가 무게의 크기보다 더 크게 그려져 있다.



개념형 예제 6.5

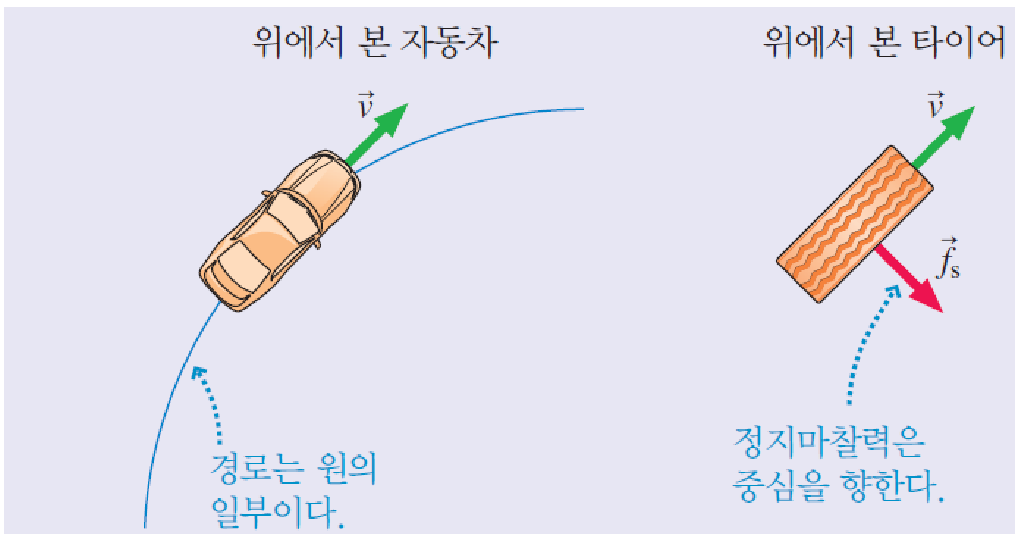
자동차가 원 궤도의 일부를 따라 일정한 속력으로 회전하고 있다. 어떤 힘이 필요한 구심 가속도를 제공하는가?

판단

- 자동차는 회전하는 데 필요한 사분원의 원호를 따라 일정한 속력으로 운동(등속 원운동)을 한다.
- 가속도는 원의 중심방향임을 알고 있다. 어떤 힘이 이러한 가속도를 발생시키는가?
- 매우 미끄러운 빙판길에서와 같이 마찰이 없는 도로에서 자동차를 운행한다고 상상해보자.
- 여러분은 커브길을 돌 수 없을 것이다. 핸들을 돌리는 것은 아무 소용이 없다. 뉴턴의 제1법칙과 얼음 위에서 운전해본 경험에 의하면, 자동차는 직선방향으로 미끄러질 것이다.
- 따라서 차를 회전시키는 마찰력이 존재하여야 한다.

개념형 예제 6.5 ... 판단 계속

- 그림 6.7에 나타낸 위에서 본 타이어 그림은 회전하는 자동차 타이어 중 하나에 작용하는 힘을 보여준다. 그 힘은 운동 마찰력이 아니고 정지 마찰력이다. 왜냐하면 자동차가 미끄러지지 않기 때문이다.
- 타이어가 도로와 접촉하고 있는 점은 표면에 상대적으로 운동하지 않는다. 만약 미끄러진다면 자동차는 커브길을 돌 수 없고 직선 경로로 계속 나아갈 것이다.



문제 풀이 전략 6.1 등속 원운동의 동역학 문제들

원운동은 가속도, 곧 알짜힘과 관련이 있다. 따라서 뉴턴의 제2법칙 문제에서 보았던 것과 매우 유사한 방법을 사용할 수 있다.

준비 운동의 개요와 기호 및 축의 정의를 보여주고 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지를 확인할 수 있는 개요도에서 시작하라. 여기에는 두 가지 상황이 있다.

- 운동이 탁자 위와 같이 수평면에서 일어난다면, 원을 옆에서 바라볼 때 원의 중심을 향하는 x축과 원이 이루는 평면에 수직인 y축을 나타내는 자유 물체 도형을 그린다.
- 운동이 놀이공원의 대회전 관람차와 같이 수직면에서 일어난다면, 원을 앞에서 바라볼 때 원의 중심을 가리키는 x축과 원에 접하는 y축을 나타내는 자유 물체 도형을 그린다.

풀이 등속 원운동에 대한 뉴턴의 제2법칙 $\vec{F}_{\text{net}} = (mv^2/r$, 원의 중심을 향함)은 벡터 방정식이다. 몇 개 힘들은 원을 이루는 평면에서 작용하고, 몇 개 힘들은 원에 수직하게 작용하며, 또 다른 힘들은 두 방향 모두에서 작용한다. 위에서 설명한 것처럼 원의 중심을 향한 x축을 가진 좌표계에서 뉴턴의 제2법칙은

$$\sum F_x = \frac{mv^2}{r}, \quad \sum F_y = 0$$

문제 풀이 전략 6.1 등속 원운동의 동역학 문제들

이 된다. 즉 원의 중심을 향하는 알짜힘은 크기가 mv^2/r인 반면 원에 수직으로 작용하는 알짜힘은 0이다. 힘의 성분들은 자유 물체 도형으로부터 직접 구한다. 문제에 따라 다음 둘 중의 하나를 이용한다.

- 속력 v를 구하기 위해서 알짜힘을 사용하고, 원운동의 운동학을 사용하여 진동수와 운동의 다른 세부사항을 구한다.
- 속력 v를 구하기 위해서 원운동의 운동학을 사용하고, 미지의 힘을 구한다.

검토 알짜힘이 원의 중심을 향하고 있는지를 확인한다. 그 결과가 올바른 단위를 갖고 있는지, 합리적인지, 그리고 답이 질문에 맞는지를 조사한다.

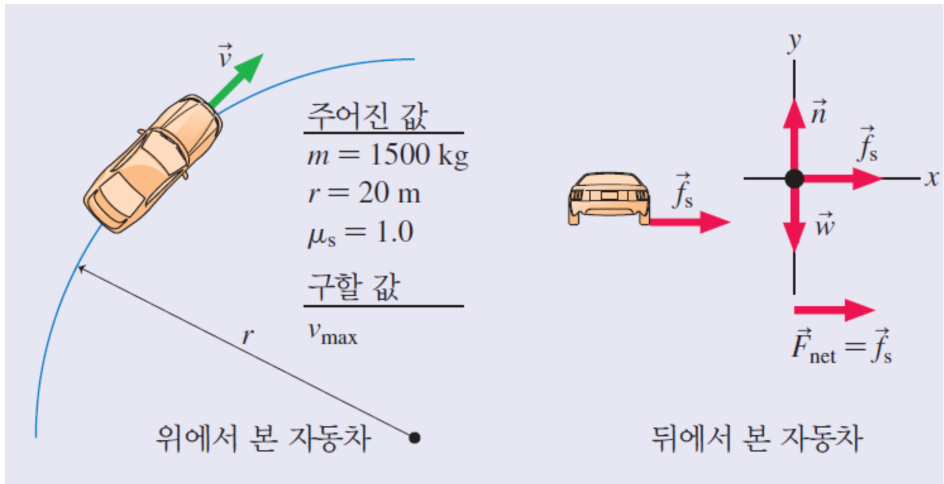
예제 6.7

1500 kg의 자동차가 경사가 없는 편평한 도로에서 반지름 20 m의 커브길을 회전할 때 미끄러지지 않고 회전할 수 있는 최대 속력은 얼마인가? (이 반지름은 도시의 일반도로 교차로에서 자동차가 회전하는 것과 같은 정도이다.)

준비

- 그림 6.9의 개요도로 시작하자. 자동차는 회전하는 데 필요한 사분원에 대하여 원호를 따라 일정한 속력으로 운동(등속 원운동)을 한다.
- 개념형 예제 6.5에서 구심 가속도를 제공하는 힘은 타이어와 도로 사이의 정지 마찰력이라는 것을 알았다.
- 알짜힘(즉 정지 마찰력)의 방향은 가속도 방향이어야 한다. 자동차의 뒤쪽에서 본 자유 물체 도형은 원의 중심을 향하는 정지 마찰력을 보여준다.
- 운동이 수평면에서 일어나기 때문에 중심으로 향하는 x축과 운동면에 수직인 y축을 택하였다.

예제 6.7 ... 풀이



- 원의 중심을 향한 x방향에서의 힘은 정지 마찰력뿐이다. x축을 따라 뉴턴의 제2법칙은 다음과 같다.

$$\sum F_x = f_s = \frac{mv^2}{r}$$

- 이 예제와 앞의 예제와의 차이는 중심을 향한 장력이 중심을 향한 정지 마찰력으로 대체된 것뿐이다.

예제 6.7 ... 풀이 계속

- y방향에서의 뉴턴의 제2법칙은

$$\sum F_y = n - w = ma_y = 0$$

이고, $n = w = mg$ 이다.

- 원의 중심을 향한 알짜힘은 정지 마찰력이다. 5장의 식 (5.7)을 보면 정지 마찰력이 최대가 되는 값은

$$f_{s\,\max} = \mu_s n = \mu_s mg$$

이다. 정지 마찰력이 최대이므로 자동차가 미끄러지지 않고 회전할 수 있는 최대 속력이 있을 것이다.

6.2 등속 원운동의 동역학

예제 6.7 ... 풀이 계속

- 이 속력은 정지 마찰력이 최댓값 $f_{s\,max} = \mu_s mg$ 에 도달하였을 때의 값이다
- 자동차가 이 속도보다 더 높은 속력에서 회전한다면 정지 마찰력은 필요로 하는 구심 가속도를 제공하지 못하고 자동차는 미끄러질 것이다.

- 그러므로 최대 속력은 정지 마찰력의 최댓값에서 일어난다. 즉

$$f_{s\,max} = \frac{m{v_{max}}^2}{r}$$

일 때 일어난다. 알려진 $f_{s\,max}$ 값을 사용하면,

$$\frac{m{v_{max}}^2}{r} = f_{s\,max} = \mu_s mg$$

예제 6.7 ... 풀이 계속

- 이 식을 정리하면

$$v_{\text{max}}{}^2 = \mu_s g r$$

를 얻는다. 포장도로에서 고무 타이어의 정지 마찰 계수는 표 5.2 로부터 $\mu_s = 1.0$이다.

따라서 커브길을 돌 수 있는 최대 속력은 다음과 같다.

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\mu_s g r} = \sqrt{(1.0)(9.8\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})} = 14\ \text{m/s}$$

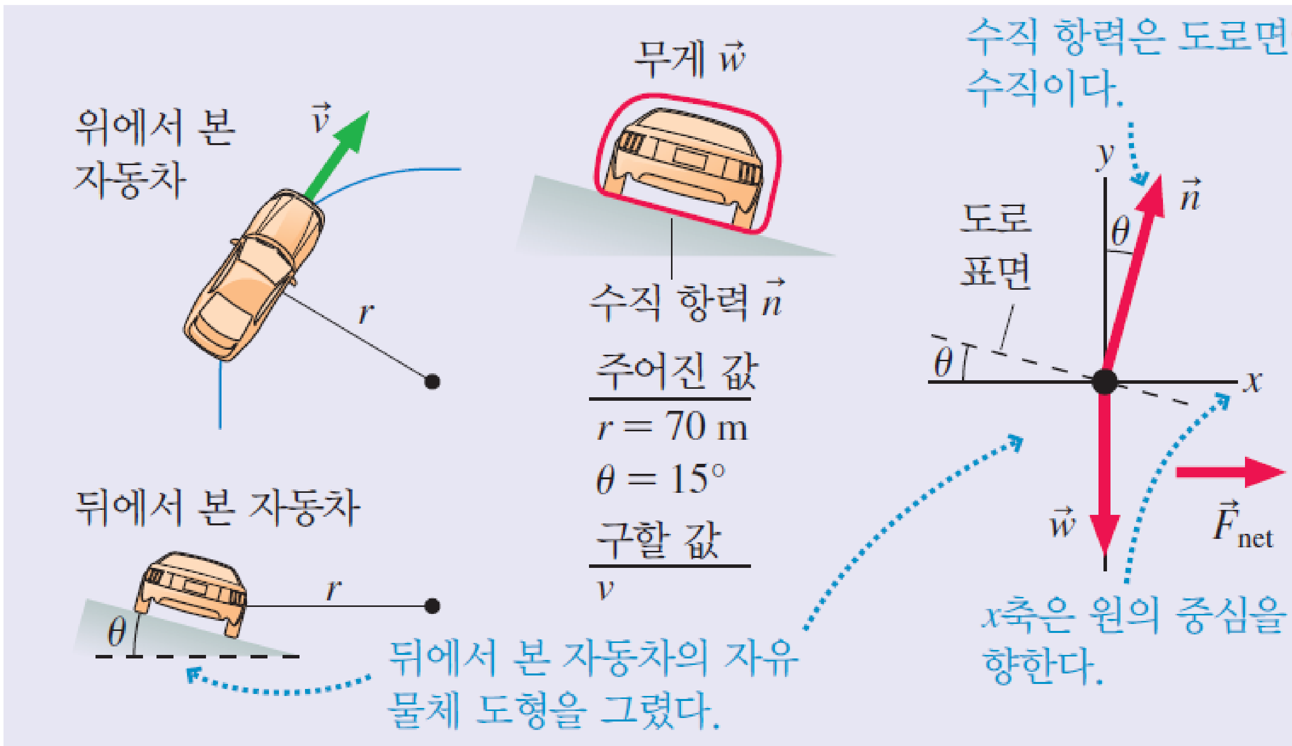
예제 6.8

반지름 70 m인 경주트랙의 커브길이 15° 경사져 있다. 자동차가 마찰력의 도움 없이 이 커브를 돌려면 속력이 얼마이어야 하는가?

준비

- 그림 6.11의 개요도를 그린 후 속력을 구하기 위하여 마찰력 작용이 없는 개별적인 두 힘, 즉 수직 항력과 자동차의 무게만 주어진 힘 식별 도형을 사용한다.
- 도로 표면에 수직인 수직 항력을 확실히 그린 자유 물체 도형을 구성할 수 있다.
- 자동차가 기울어져 있다 하더라도 수평 원을 따라 운동하고 있다.
- 따라서 문제 풀이 전략 6.1을 따라 원의 중심을 향하고 원에 수평면인 x축을 선택한다.

예제 6.8 ... 준비 계속

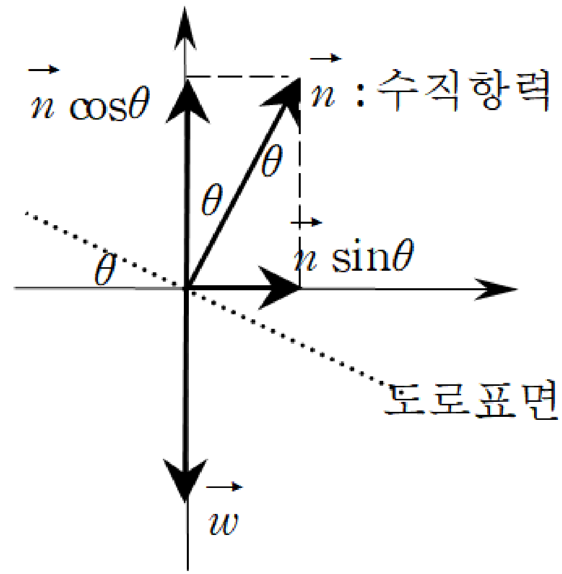

위에서 본 자동차
v
r
무게 w
수직 항력 n
주어진 값
r = 70 m
θ = 15°
구할 값
v
뒤에서 본 자동차
r
θ
뒤에서 본 자동차의 자유 물체 도형을 그렸다.
수직 항력은 도로면에 수직이다.
y
n
θ
도로 표면
θ
x
w
F net
x축은 원의 중심을 향한다.

예제 6.8 ... 풀이

마찰이 없다면 $n_x = n\sin\theta$가 원의 중심을 향한 유일한 힘의 성분이다.
이 수직 항력의 안쪽 성분이 자동차가 커브길을 회전하게 하는 원인이 된다.
뉴턴의 제2법칙은

$$\sum F_x = n\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$\sum F_y = n\cos\theta - w = 0$$

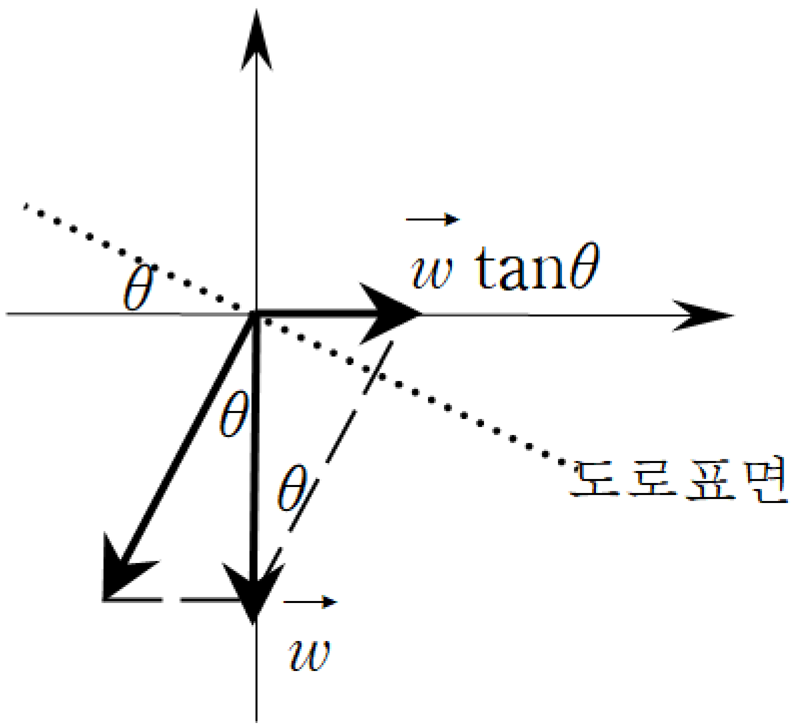


$$\Longrightarrow \quad n = \frac{mv^2}{r\sin\theta}, \quad n = \frac{w}{\cos\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{mv^2}{r\sin\theta} = \frac{w}{\cos\theta}$$

$$\Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rw}{m}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{r\,mg}{m}\tan\theta} = \sqrt{rg\tan\theta} = 14\,m/s$$

예제 6.8 ... 다른 풀이



$$\vec{w}\ \tan\theta = ma$$

$$\Rightarrow mg\tan\theta = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{rg\tan\theta}$$

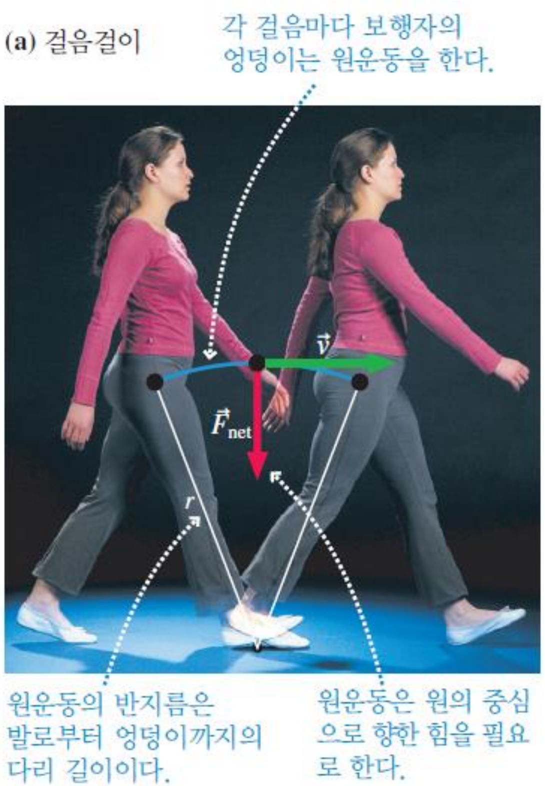
$$= \sqrt{70\,m \times 9.8\,m/s^2 \times \tan 15^\circ}$$

$$\approx 14\,m/s$$

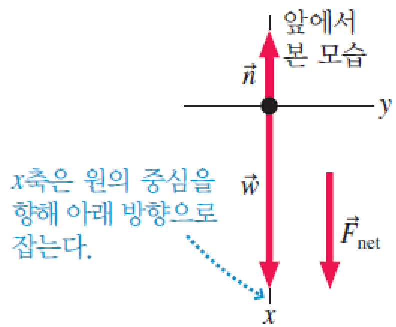
최대 보행속도

- 보행자가 뒷다리를 내디딜 때 보행자의 몸은 앞다리를 축으로 원운동

(a) 걸음걸이



(b) 걸음걸이에 작용하는 힘



최대 보행속도

- x축에 대한 뉴턴의 제2법칙 :

$$\sum F_x = w - n = \frac{mv^2}{r}$$

- 가능한 최대 보행속도 $v_{\max}$는 $n = 0$ 일 때이다.
- $n = 0$일 때 뉴턴의 제2법칙은

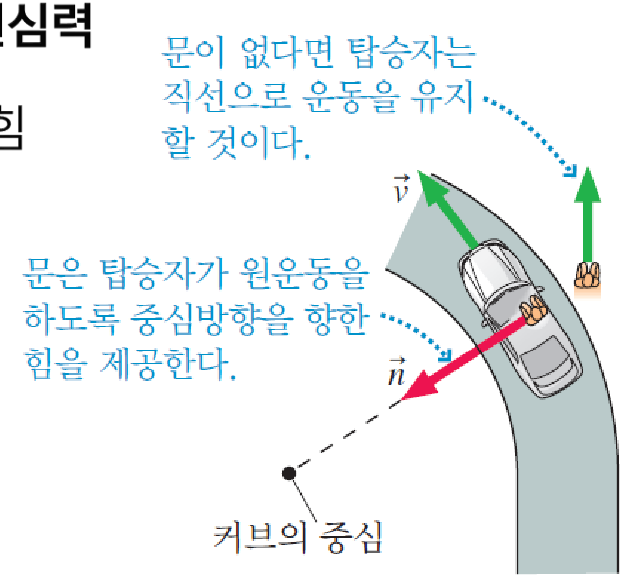
$$w = mg = \frac{m{v_{\max}}^2}{r}$$

따라서 $v_{\max} = \sqrt{gr}$ (6.7)

6.3 원운동에서의 겉보기힘

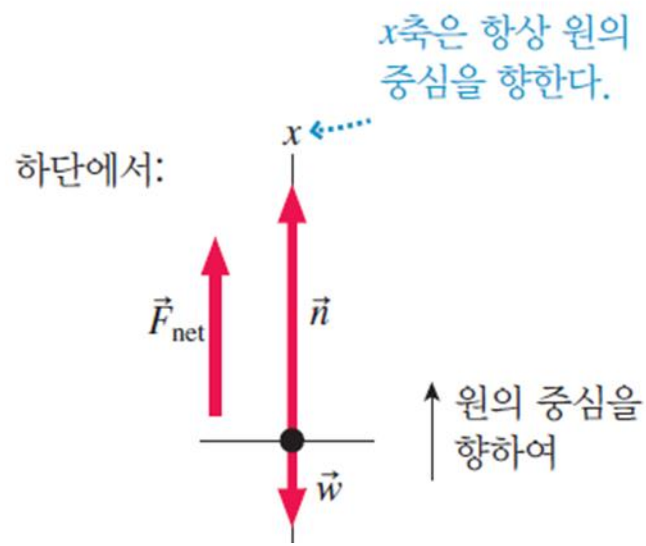
원심력?

- 뉴턴의 제1법칙에 따라 탑승자는 직선으로 계속 운동하려 하지만 의도하지 않게 차문이 탑승자 쪽으로 접근해 탑승자의 몸을 차 안으로 민다.
- 탑승자는 커브의 중심을 향하여 안쪽으로 문이 미는 힘을 느끼게 되고 이 힘 때문에 회전한다.
- 물체를 원 바깥쪽으로 미는 것처럼 보이는 힘 → **원심력**
- 이 힘은 명칭이 있음에도 불구하고 실제로는 없는 힘
- **<u>원심력은 결코 자유 물체 도형에 나타나지 않으며 뉴턴의 법칙에 포함되지 않음</u>**



원운동에서의 겉보기 무게

- 롤러 코스트의 하단에서 탑승자에게 작용하는 힘을 조사해보자.
  - 탑승자는 원운동을 하고 있으며 구심 가속도를 만들어내는 원의 중심을 향한(여기에서는 탑승자의 머리 위쪽 방향) 알짜힘이 있어야 한다.
  - 알짜힘은 위쪽 방향이므로 $n > w$이어야만 한다.
  - 탑승자의 겉보기 무게는 $w_{app} = n$ 이며 탑승자의 겉보기 무게는 실제 무게보다 더 크다 ($w_{app} > w$).
  - 원 궤도의 하단에서 탑승자는 '무거워짐'을 느낀다.



원운동에서의 겉보기 무게

- 이 경우 x축을 원의 중심을 향한 수직 위 방향으로 선택하고 뉴턴의 제2법칙을 적용하면,

$$\sum F_x = n_x + w_x = n - w = \frac{mv^2}{r}$$

- 이 식으로부터 탑승자의 겉보기 무게는 다음과 같이 주어진다.

$$w_{\text{app}} = n = w + \frac{mv^2}{r} \tag{6.8}$$

- 궤도 바닥에서 탑승자의 겉보기 무게는 탑승자의 실제 무게 w보다 더 크다.

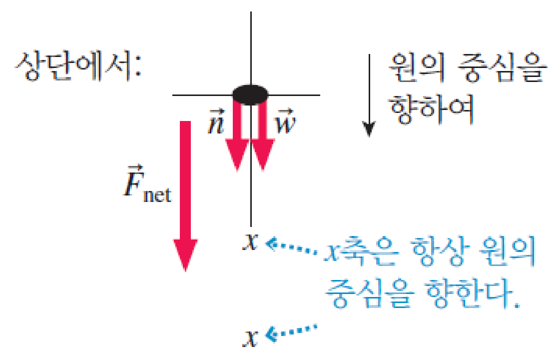
원운동에서의 겉보기 무게

- 이제 궤도의 상단을 지나는 롤러코스터 차를 조사해보자.
- 여기에서는 x축이 아래로 향한다. 그렇게 하면 뉴턴의 제2법칙은

$$\sum F_x = n_x + w_x = n + w = \frac{mv^2}{r}$$

- x축의 방향이 아래로 향하므로 w_x는 양(+)의 값을 가짐

$$w_{\text{app}} = n = \frac{mv^2}{r} - w \qquad (6.9)$$



- v가 충분히 크다면 탑승자의 겉보기 무게는 트랙의 바닥에서와 같이 실제 무게를 초과할 수 있음

원운동에서의 겉보기 무게

- 차가 천천히 운동하면 v가 감소함에 따라 $mv^2/r = w$, 즉 $n = 0$인 점을 지나게 된다.
- $n = 0$이 되는 속력 → **임계속력 v_c**
- $n = 0$에 대하여 $mv_c^2/r = w$이기 때문에 임계 속력은 다음과 같이 주어진다.

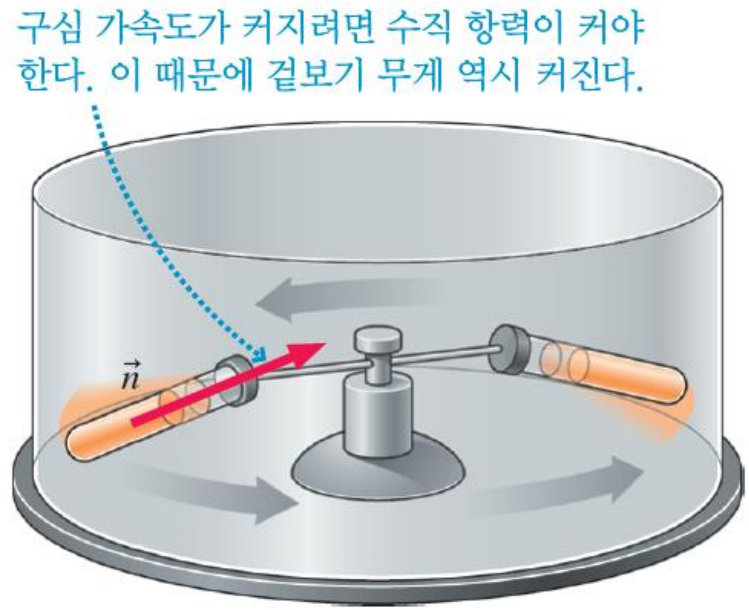
$$v_c = \sqrt{\frac{rw}{m}} = \sqrt{\frac{rmg}{m}} = \sqrt{gr} \tag{6.10}$$

- 임계 속력은 롤러코스터 차가 회전을 할 수 있는 가장 느린 속력

원심분리기

- 생물학에 응용되는 원운동은 서로 다른 밀도를 가진 액체의 성분을 분리해내는 데 사용되는 원심분리기가 있다.

- 원심분리기는 자유 낙하 가속도보다 수천 배나 큰 구심 가속도를 만들어냄



예제 6.10

지름이 18 cm인 초원심분리기는 250,000 g의 엄청나게 큰 구심 가속도를 만들 수 있다. 여기에서 g는 중력이 만들어내는 자유 낙하 가속도이다. 이 기계가 낼 수 있는 회전 진동수는 몇 rpm인가? 질량이 0.0030 kg인 시편의 겉보기 무게는 얼마인가?

준비

- SI 단위를 사용하면

$$a = 250{,}000(9.80\ \mathrm{m/s^2}) = 2.45 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2}$$

이며, 반지름은 $r = 9.0\ \mathrm{cm} = 0.090\ \mathrm{m}$이다.

$$a = \frac{\nu^2}{r},\ \nu = 2\pi r f$$
$$\Rightarrow \sqrt{ar} = 2\pi r f$$
$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}}$$

예제 6.10 ... 풀이

식 (6.5)를 변형하여 진동수를 구하면

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2.45 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2}}{0.090\ \mathrm{m}}} = 830\ \mathrm{rev/s}$$

이고, 이것을 rpm으로 바꾸면

$$830\ \frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{s}} \times \frac{60\ \mathrm{s}}{1\ \mathrm{min}} = 50{,}000\ \mathrm{rpm}$$

이다. 가속도가 매우 크기 때문에 구심 가속도를 제공하는 힘 이외의 나머지 힘들은 무시할 수 있다. 알짜힘은 안쪽 방향의 힘과 같은데, 이것이 시료의 겉보기 무게이기도 하다.

$$w_{\mathrm{app}} = F_{\mathrm{net}} = ma = (3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg})(2.45 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2}) = 7.4 \times 10^3\ \mathrm{N}$$

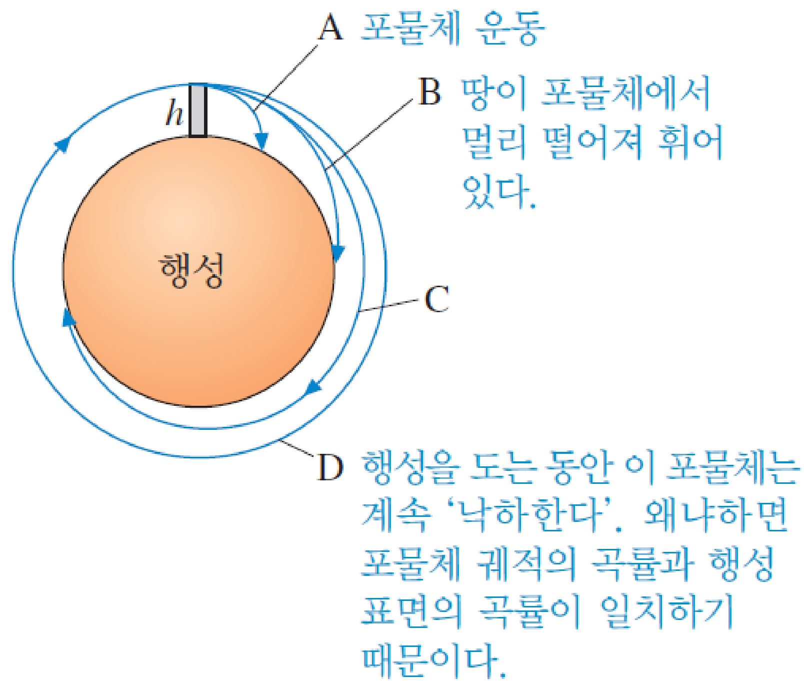
질량이 3 g인 시편의 실효 무게는 740 N이나 된다.

6.4 원형 궤도와 무중력

궤도 운동

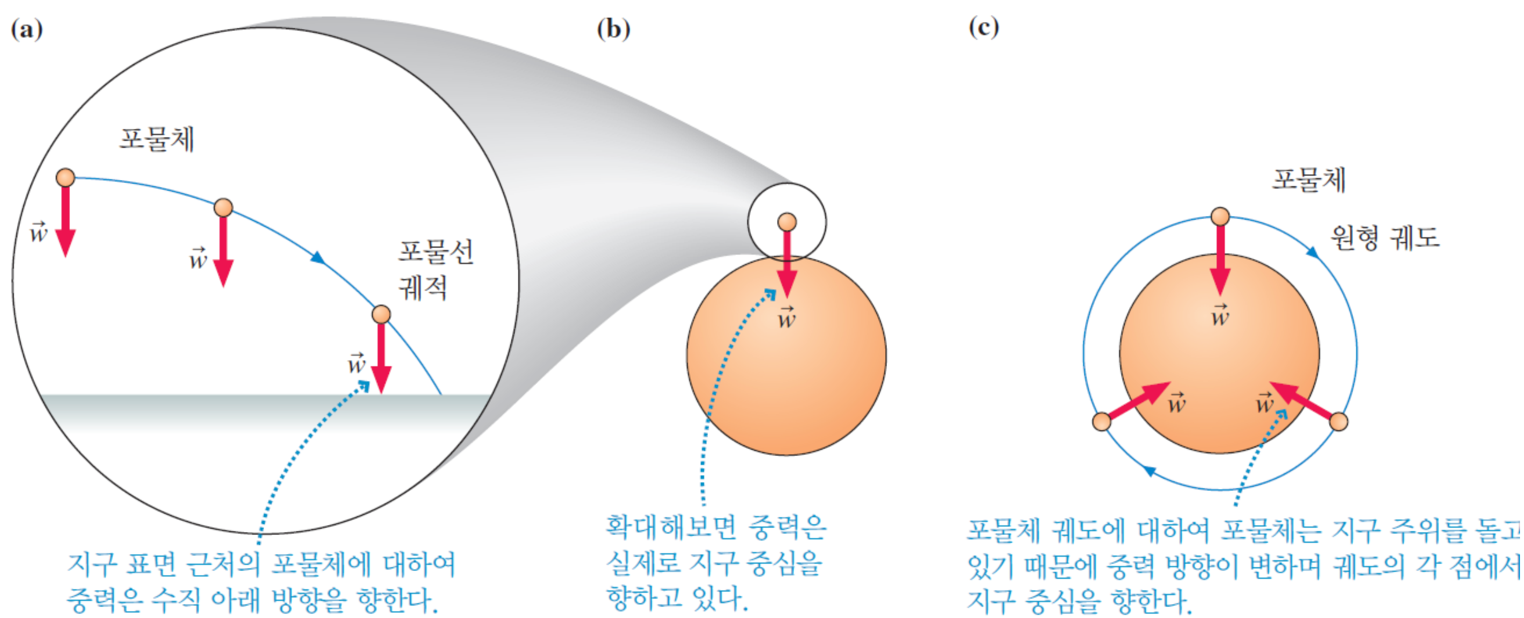
- 만일 발사속력 v_i 가 충분히 크면 포물체의 궤적과 지면의 곡선은 평행하여 땅에 떨어지지 않는 경우에 이른다. → **궤적 D의 경우**
- 행성이나 별 주위에 생긴 이처럼 닫힌 궤적 → **궤도(orbit)**

그림 6.19 매끄럽고 공기 저항이 없는 행성의 높이 h인 곳에서 발사된 포물체



궤도 운동

- 궤도 운동을 하는 포물체는 자유 낙하한다는 것
- 자유 낙하 가속도는 항상 수직 아래 방향을 향함 → '아래 방향'은 실제로 '지구의 중심방향'



6.4 원형 궤도와 무중력

궤도 운동

- 원의 중심을 향하는 일정한 크기의 힘은 등속 원운동의 구심 가속도를 만들어냄
- 궤도를 도는 포물체에 작용하는 유일한 힘은 중력

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{w}{m} = \frac{mg}{m} = g \tag{6.11}$$

- 반지름 r인 원 궤도를 속력 v_{orbit}로 운동하는 물체는

$$a = \frac{(v_{\text{orbit}})^2}{r} = g \tag{6.12}$$

인 구심 가속도를 갖는다.

$$v_{\text{orbit}} = \sqrt{gr} \tag{6.13}$$

궤도 운동

- 이와 다른 속력으로 운동하는 물체는 원 궤도를 돌지 못함
- 매끄럽고 공기 저항이 없는 지구 표면을 스치듯이 지나가는 포물체의 궤도 속력은,

$$v_{\text{orbit}} = \sqrt{gR_{\text{e}}} = \sqrt{(9.80\text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6\text{ m})} = 7900\text{ m/s} \approx 28{,}500\text{ km/h}$$

- 이 속력으로 이 궤도의 인공위성 주기를 계산하면,

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\text{orbit}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \tag{6.14}$$

궤도에서의 무중력

- 우주비행사와 우주선의 자유 낙하
- 무중력은 무게나 중력이 없기 때문에 생기는 것이 아님
- 대신 운항하고 있는 우주비행사, 우주선 그리고 우주선에 있는 모든 물체들이 모두 다 함께 떨어지고 있기 때문에 '무중력'(곧 겉보기 무게가 0인) 상태인 것

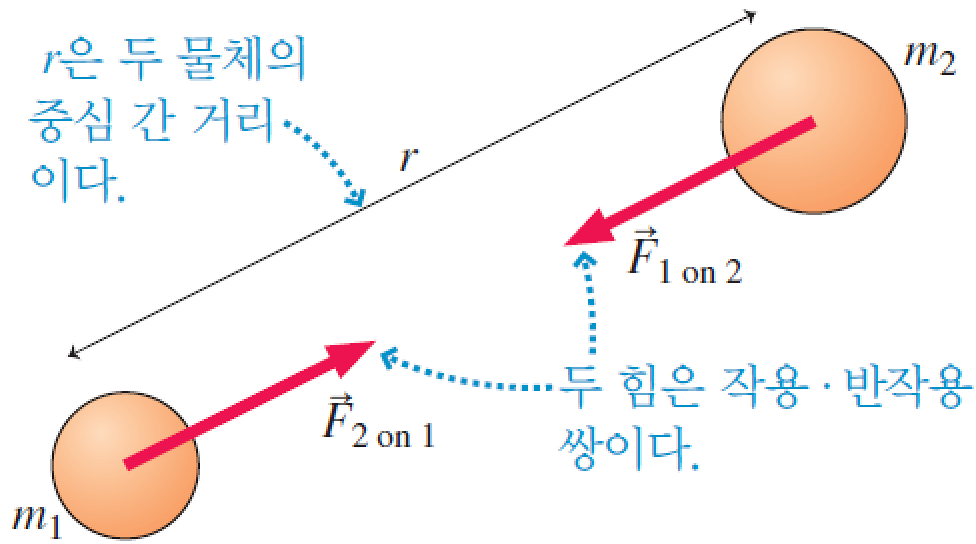
달의 궤도

- 달은 지구 주위로 원형 궤도에 가까운 궤도를 돈다.
- 달도 인공위성과 같이 지구 주위를 향해 떨어지고 있음
- 달까지의 거리로 $r = 3.84 \times 10^8\ \mathrm{m}$ 를 사용하면, 달이 지구를 한 바퀴 온전히 도는 데 걸리는 시간은 근사적으로 11시간 → 명백히 틀림
- **잘못된 이유:**
  - 식 (6.14)를 사용할 때 달이 있는 곳에서의 자유 낙하 가속도 g가 지구 표면이나 표면 근처에서의 값과 같다고 가정
  - 실제로 중력은, 다음 절에서 살펴볼 방법에 의하면, 거리가 증가하면 감소

6.5 뉴턴의 중력 법칙

중력은 역제곱 법칙을 따른다

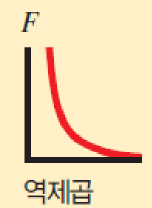
- 이 힘은 물체들 사이 거리의 제곱에 반비례한다.
- 이 힘은 두 물체의 질량의 곱에 비례한다.



중력은 역제곱 법칙을 따른다

뉴턴의 중력 법칙 질량 m_1과 m_2를 갖는 두 물체들이 거리 r만큼 떨어져 있다면 각 물체에 작용하는 끌어당기는 힘의 크기는 다음과 같이 주어진다.

$$F_{1\,\mathrm{on}\,2} = F_{2\,\mathrm{on}\,1} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{6.15}$$



힘은 두 물체를 연결하는 선을 따라 작용한다.

상수 G는 **중력 상수**라고 하며 SI 단위계에서 다음과 같다.

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

- 거리는 분모의 제곱으로 나타나기 때문에 뉴턴의 중력 법칙은 **역제곱 법칙(inverse square law)**이라고도 함

개념형 예제 6.11

커다란 2개의 납공이 20 m 떨어져 있고 이들 사이에 작용하는 중력은 0.010 N이다. 그들 사이의 중력이 0.160 N이 되려면 두 공 사이의 거리는 얼마이어야 하는가?

판단

- 두 공의 질량을 알 수는 없지만 이 문제를 풀 수 있다.
- 힘과 거리의 비가 이 문제를 푸는 열쇠이다.
- 중력은 힘과 거리와 의 관계식이 거리의 제곱에 반비례하는 역제곱 관계식을 갖는다.
- 따라서 힘은 (0.160 N)/(0.010 N) $=$ 16만큼 증가하므로 거리는$\sqrt{16} = 4$ 만큼 감소한다.
- 그러므로 거리는 (20 m)/4 = 5.0 m

예제 6.13

60 kg인 사람에게 작용하는 지구 중력의 크기는 얼마인가? 지구 질량은 5.98×10^{24} kg 이고 반지름은 $r = 6.37 \times 10^{6}$ m 이다.

준비

- 사람을 다시 공으로 취급하자. 뉴턴의 중력 법칙에서 거리 r는 두 공의 중심 사이의 거리이다. 사람의 크기는 지구의 크기에 비해 무시할 수 있을 만큼 작으므로 지구의 반지름을 r로 사용할 수 있다.

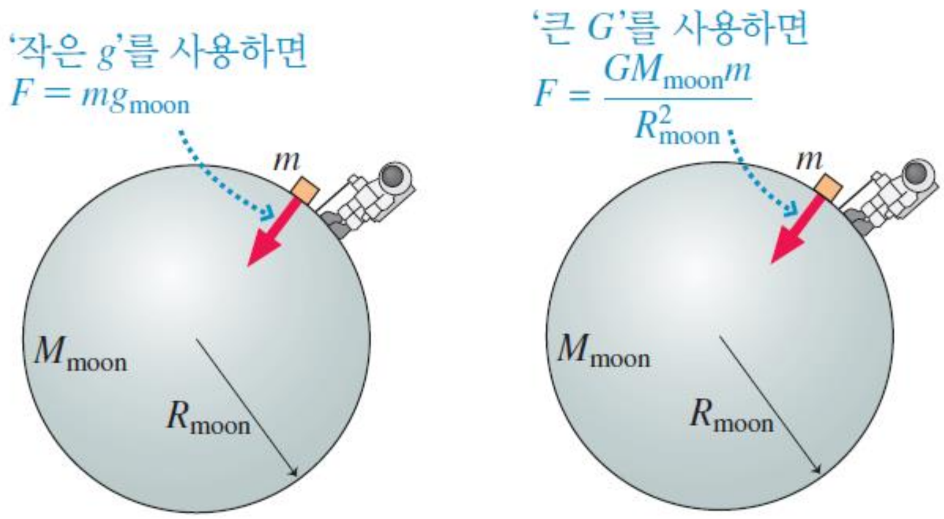
풀이

- 식 (6.15)를 사용

$$
\begin{aligned}
F_{\text{earth on person}} &= \frac{GM_e m}{R_e^2} \\
&= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(60\ \text{kg})}{(6.37 \times 10^{6}\ \text{m})^2} \\
&= 590\ \text{N}
\end{aligned}
$$

다른 세계에서의 중력

- 다른 행성을 탐험하게 된다면 물체의 질량은 같은 값을 가지지만 물체의 무게는 다를 것
- 지구 표면에서 물체의 무게를 계산할 때는 공식 $w = mg$ 사용
- 달에서의 g값을 사용한다면 달에서의 질량 m에 대해서도 같은 방법으로 계산할 수 있음



다른 세계에서의 중력

- 즉,
$$w = mg_{\mathrm{moon}} \tag{6.16}$$
- g_{moon} 값은 1.62 m/s² 임
- 식 (6.15)로 이 무게를 계산할 수 있다. 거리 r를 달의 반지름 R_{moon}로 쓰면,
$$F_{\mathrm{moon\ on\ }m} = \frac{GM_{\mathrm{moon}}m}{R_{\mathrm{moon}}^2} \tag{6.17}$$
- 식 (6.16)과 (6.17)은 같은 힘이며 다른 이름을 가진 두 표현이기 때문에, 두 식의 우변을 같게 놓으면 다음과 같다.

$$g_{\mathrm{moon}} = \frac{GM_{\mathrm{moon}}}{R_{\mathrm{moon}}^2}$$

예제 6.14

화성은 2개의 위성을 가지고 있는데 둘 다 지구의 위성인 달보다 훨씬 작다. 둘 중 작은 위성인 데이모스는 반지름이 6.3 km이고 질량은 1.8×10^{15} kg이다. 데이모스의 근접 궤도로 진입하려면 포물체의 속력은 얼마이어야 할까?

풀이

- 데이모스 표면에서 자유 낙하 가속도는 아주 작다.

$$g_{\text{Deimos}} = \frac{GM_{\text{Deimos}}}{R_{\text{Deimos}}^2}$$
$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1.8 \times 10^{15}\ \text{kg})}{(6.3 \times 10^3\ \text{m})^2}$$
$$= 0.0030\ \text{m/s}^2$$

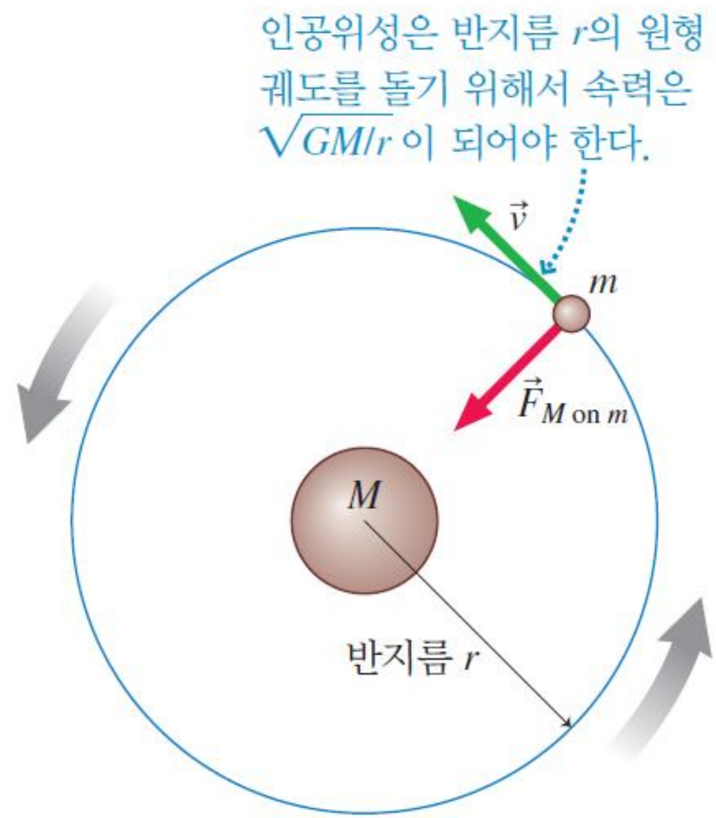
- 이 값과 식 (6.13)을 사용하면 궤도 속력은

$$g = \frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{gr}$$

$$v_{\text{orbit}} = \sqrt{gr} = \sqrt{(0.0030\ \text{m/s}^2)(6.3 \times 10^3\ \text{m})}$$
$$= 4.3\ \text{m/s} \approx 16\ \text{km/h}$$

6.6 중력과 궤도

- 뉴턴의 제2법칙은 $F_{M\,\mathrm{on}\,m} = ma$ 이고 $F_{M\,\mathrm{on}\,m}$은 큰 물체가 인공위성에 작용하는 중력이며, a는 인공위성의 가속도
- 인공위성은 원형 궤도를 돌고 있기 때문에 뉴턴의 제2법칙은 다음 식으로 주어짐



6.6 중력과 궤도

$$g = \frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{gr}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r^2} r}$$

- $$F_{M \text{ on } m} = \frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r} \tag{6.20}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{6.21}$$

질량 M인 별이나 행성 주위로 반지름 r인 원형 궤도를 도는 인공위성의 속력

- 반지름이 r이고 질량이 M인 물체 주위에서 인공위성이 원형 궤도를 유지하면서 돌려면 이 속력을 가져야 함

6.6 중력과 궤도

- 태양 주위를 도는 행성의 주기 T는 태양 주위를 완전히 한 번 회전하는 데 걸리는 시간
- 임의의 원운동에서 회전속력, 회전 반지름 및 주기의 관계는 동일하므로

$v = 2\pi r/T$

$$\sqrt{\frac{GM}{r}} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \tag{6.22}$$

질량 M인 물체 주위로 원형 궤도를 도는
인공위성의 주기 T와 회전 반지름 r과의 관계

- 일반적으로 회전 주기의 제곱은 궤도 반지름의 세제곱에 비례

예제 6.15

통신위성은 지구 적도 상공의 한 점에서 제자리 '맴돌기'를 한다. 지구가 자전할 때 정지한 것처럼 보이는 인공위성은 지구정지궤도에 있다. 이 정지위성의 궤도 반지름은 얼마인가?

준비

- 지구에 대하여 정지한 것처럼 보이는 위성은 지구의 자전속력과 같은 속력으로 돌아야 하기 때문에 정지위성의 궤도 주기는 24시간이어야 한다.
- 주기는 $T = 8.64 \times 10^4\ \mathrm{s}$ 이다.

풀이

$$r = \left(\frac{GM_e T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})(8.64 \times 10^4\ \mathrm{s})^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4.22 \times 10^7\ \mathrm{m}$$

거대 규모의 중력

- 물체가 매우 멀리 떨어져 있다고 하더라도 그들 사이에는 중력이 작용
- 은하수는 중력에 의해 유지됨
- 우리 태양계의 역사는 약 50억 년
- 이 시간에 우리 은하는 은하의 중심을 축으로 하여 대략 20번 회전했음
- 일반적으로 은하계의 별들은 일정한 각속도로 원운동을 하지는 않을 것으로 생각
- 은하계의 모든 별들은 은하계 중심으로부터 떨어진 거리가 각기 다르고 주기도 제각각이기 때문임

THANK YOU

질문 있으신가요?

감사합니다.