수치해석 (1학기)

김상배 교수

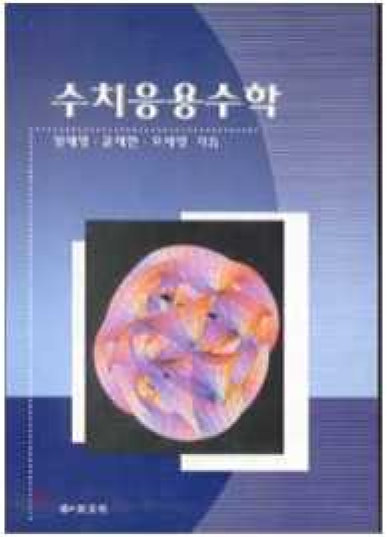
xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지

카톡(공부내용 질문)



교과서: 수치응용수학, 정세영외2인, 경문사

수치해석 : 해석학적으로 얻기 어려운 문제의 답을 수치적으로 근사값을 구하려는 연구.

예)

Input interpretation:

series	e^x	point	$x = 0$

Series expansion at x=0:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

(converges everywhere)

Taylor 급수

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 무한번 미분가능일 때 무한급수

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ \cdots$$

을 $x=a$ 에서 f 의 Taylor급수라 한다.
특히 $a=0$ 일 때 f 의 Taylor급수를 특히 Maclaurin급수라 한다.

Taylor의 정리

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 을 포함하는 구간에서 $(n+1)$ 번 미분가능하면,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\ \cdots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

이고 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ 가 되는 점 ξ 가 a 와 x 사이에 존재한다.

함수들의 멱급수 전개

Maclaurin 급수	수렴구간
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$

[예제] e 의 값을 소수점이하 넷째자리까지 정확히 구하여라.

(풀이)

모든 x 에 대하여

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < c < x)$$

이므로 $x = 1$ **이면** $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ **이다.**

$c < 1$**이므로** $|R_n| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!}$ **이다.**

여기서 $e < 3$ **이므로** $|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}$ **이다.**

소수점이하 4째자리까지 정확하려면

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} < 0.5 \times 10^{-4} = 0.00005$$ **이어야 하고**

$n = 8$ **이면 위 식을 만족하므로**

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.7183$ **이다.** ■

[예제] $\sin 3°$ **의 값을 소수점이하 다섯째 자리까지 정확히 구하여라.**

(풀이)

$f(x) = \sin x$ **로 놓으면** $f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$ **이다.**

$$f(3°) = f\left(\frac{\pi}{60}\right) = \frac{\pi}{60} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^7 + \cdots + R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)$$

그런데 $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$ **이므로**

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}$$

소수점이하 다섯째 자리까지 정확하려면

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1} < 0.5 \times 10^{-5}$$ **이어야 하고**

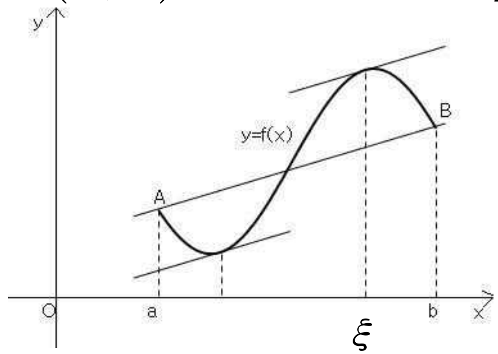
$n = 3$ **이면 위 식을 만족하므로**

$\sin 3° = \sin\frac{\pi}{60} \approx \frac{\pi}{60} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3 \approx 0.05234$ **이다.** ■

평균값정리

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 도함수 $f'(x)$가 개구간 (a,b)에서 존재하면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$



을 만족하는 $\xi \in (a,b)$가 존재한다.

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(b-a)^2$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(b-a)^3$$

$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(b-a)^2$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(b-a)^3$$

테일러의 정리

함수 $f(x)$ **가** $x=a$ **을 포함하는 구간에서** $(n+1)$ **번 미분가능하면,**

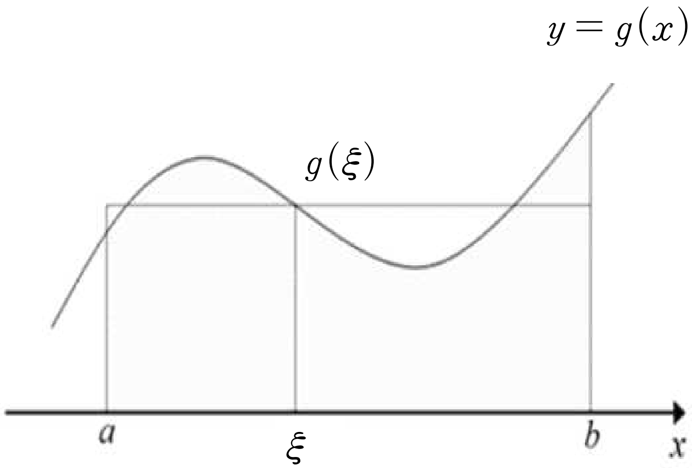
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

이고 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ **가 되는 점** ξ **가** a **와** x **사이에 존재한다.**

적분에 대한 평균값의 정리

(미분에 대한) 평균값 정리와 (어떤 의미에서) 같다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$



로부터

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$g(x)=f'(x)$ **라고 하면**

왼쪽식 : $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

오른쪽식 : $f'(\xi)(b-a)=g(\xi)(b-a)$

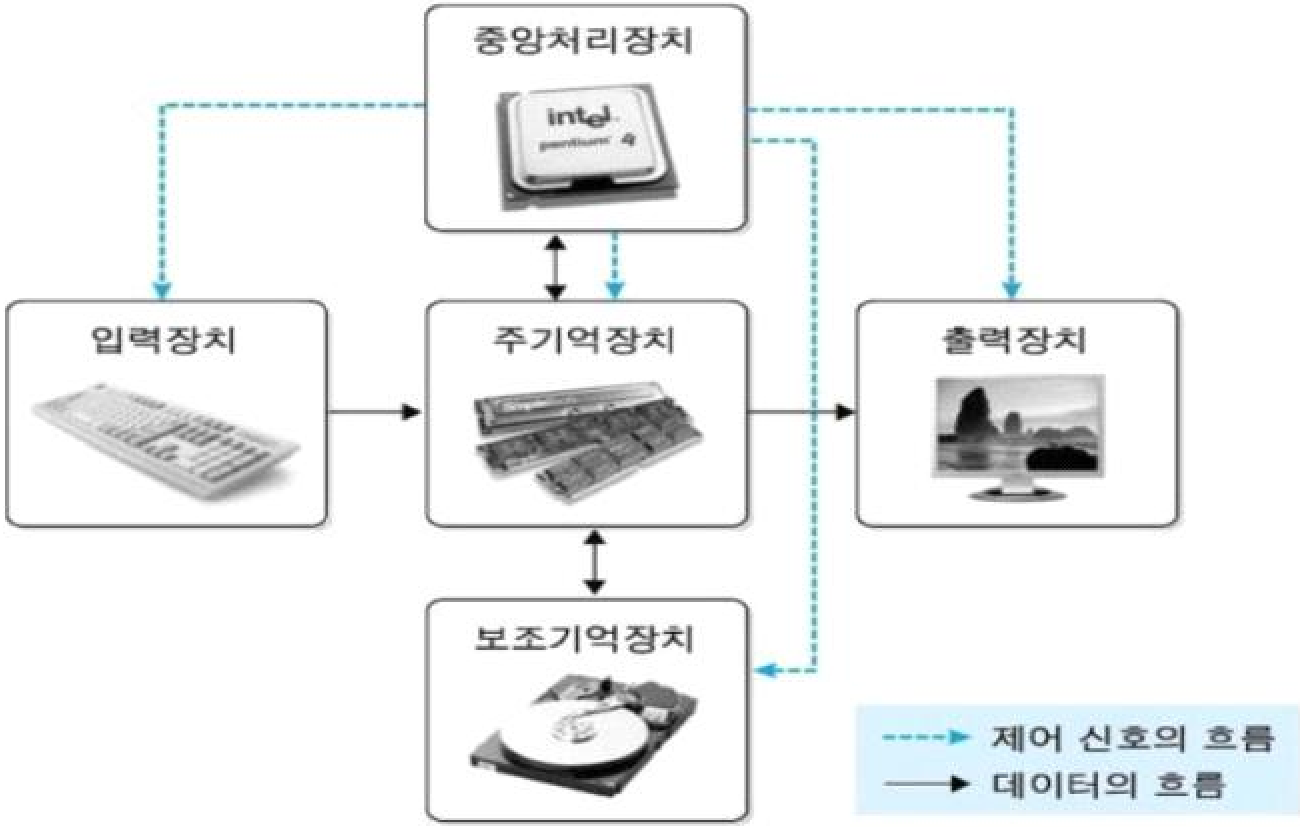
그러므로

$$\int_a^b g(x)dx=g(\xi)(b-a)$$ **여기서** $\xi\in(a,b)$

이것이 적분에 대한 평균값 정리이다.

컴퓨터의 구성 : 입력장치 + 중앙처리장치 + 출력장치

(제어장치+연산장치) + 기억장치(주기억+보조기억)



기억장치에 데이터를 저장하는 방법

데이터가 0 과 1 로만 구성됨. 0 과 1 로 숫자, 문자, 그림, 음악 등을 표시한다.

1 bit = 0 또는 1

1 byte = 8 bit = $2^8 = 256$ **개의 문자를 나타낼 수 있다. ASCII코드**

Dec	Hx	Oct	Char		Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Char
0	0	000	NUL	(null)	32	20	040	Space	64	40	100	@	96	60	140	`
1	1	001	SOH	(start of heading)	33	21	041	!	65	41	101	A	97	61	141	a
2	2	002	STX	(start of text)	34	22	042	"	66	42	102	B	98	62	142	b
3	3	003	ETX	(end of text)	35	23	043	#	67	43	103	C	99	63	143	c
4	4	004	EOT	(end of transmission)	36	24	044	$	68	44	104	D	100	64	144	d
5	5	005	ENQ	(enquiry)	37	25	045	%	69	45	105	E	101	65	145	e
6	6	006	ACK	(acknowledge)	38	26	046	&	70	46	106	F	102	66	146	f
7	7	007	BEL	(bell)	39	27	047	'	71	47	107	G	103	67	147	g
8	8	010	BS	(backspace)	40	28	050	(	72	48	110	H	104	68	150	h
9	9	011	TAB	(horizontal tab)	41	29	051	)	73	49	111	I	105	69	151	i
10	A	012	LF	(NL line feed, new line)	42	2A	052	*	74	4A	112	J	106	6A	152	j
11	B	013	VT	(vertical tab)	43	2B	053	+	75	4B	113	K	107	6B	153	k
12	C	014	FF	(NP form feed, new page)	44	2C	054	,	76	4C	114	L	108	6C	154	l
13	D	015	CR	(carriage return)	45	2D	055	-	77	4D	115	M	109	6D	155	m
14	E	016	SO	(shift out)	46	2E	056	.	78	4E	116	N	110	6E	156	n
15	F	017	SI	(shift in)	47	2F	057	/	79	4F	117	O	111	6F	157	o
16	10	020	DLE	(data link escape)	48	30	060	0	80	50	120	P	112	70	160	p
17	11	021	DC1	(device control 1)	49	31	061	1	81	51	121	Q	113	71	161	q
18	12	022	DC2	(device control 2)	50	32	062	2	82	52	122	R	114	72	162	r
19	13	023	DC3	(device control 3)	51	33	063	3	83	53	123	S	115	73	163	s
20	14	024	DC4	(device control 4)	52	34	064	4	84	54	124	T	116	74	164	t
21	15	025	NAK	(negative acknowledge)	53	35	065	5	85	55	125	U	117	75	165	u
22	16	026	SYN	(synchronous idle)	54	36	066	6	86	56	126	V	118	76	166	v
23	17	027	ETB	(end of trans. block)	55	37	067	7	87	57	127	W	119	77	167	w
24	18	030	CAN	(cancel)	56	38	070	8	88	58	130	X	120	78	170	x
25	19	031	EM	(end of medium)	57	39	071	9	89	59	131	Y	121	79	171	y
26	1A	032	SUB	(substitute)	58	3A	072	:	90	5A	132	Z	122	7A	172	z
27	1B	033	ESC	(escape)	59	3B	073	;	91	5B	133	[	123	7B	173	{
28	1C	034	FS	(file separator)	60	3C	074	<	92	5C	134	\	124	7C	174	|
29	1D	035	GS	(group separator)	61	3D	075	=	93	5D	135	]	125	7D	175	}
30	1E	036	RS	(record separator)	62	3E	076	>	94	5E	136	^	126	7E	176	~
31	1F	037	US	(unit separator)	63	3F	077	?	95	5F	137	_	127	7F	177	DEL

128	Ç	161	í	193	┴	225	ß
129	ü	162	ó	194	┬	226	Γ
130	é	163	ú	195	├	227	π
131	â	164	ñ	196	─	228	Σ
132	ä	165	Ñ	197	┼	229	σ
133	à	166	ª	198	╞	230	µ
134	å	167	º	199	╟	231	τ
135	ç	168	¿	200	╚	232	Φ
136	ê	169	⌐	201	╔	233	Θ
137	ë	170	¬	202	╩	234	Ω
138	è	171	½	203	╦	235	δ
139	ï	172	¼	204	╠	236	∞
140	î	173	¡	205	═	237	φ
141	ì	174	«	206	╬	238	ε
142	Ä	175	»	207	╧	239	∩
143	Å	176	░	208	╨	240	≡
144	É	177	▒	209	╤	241	±
145	æ	178	▓	210	╥	242	≥
146	Æ	179	│	211	╙	243	≤
147	ô	180	┤	212	╘	244	⌠
148	ö	181	╡	213	╒	245	⌡
149	ò	182	╢	214	╓	246	÷
150	û	183	╖	215	╫	247	≈
151	ù	184	╕	216	╪	248	°
152		185	╣	217	┘	249	∙
153	Ö	186	║	218	┌	250	·
154	Ü	187	╗	219	█	251	√
156	£	188	╝	220	▄	252	
157	¥	189	╜	221	▌	253	²
158		190	╛	222	▐	254	■
159	ƒ	191	┐	223	▀	255	
160	á	192	└	224	α		

0과 1로 숫자를 나타내는 방법

정수(1배정도) : 4 byte = 32bit = $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2 \times 2^{31} = 2 \times 2{,}147{,}483{,}648$

$2{,}147{,}483{,}648$**(약21억)개의 음수와, 0, 그리고** $2{,}147{,}483{,}647$**(약21억)개의 양수를 사용할 수 있다.**

실수(1배정도) : 4 byte = 32bit = 부호1bit + 지수7bit + 가수24bit

아보가드로수 : 산소16g에 들어 있는 산소원자수 = $+6.022 \times 10^{23}$

7bit의 크기 : $2^7 = 128 = (-64) \rightarrow 0 \rightarrow (+63)$

24bit의 크기 : 10진수 7자리

$$2^{24} = (2^{10})^{2.4} = 1024^{2.4} \approx (10^3)^{2.4} = 10^{(3 \times 2.4)} = 10^{7.2}$$

정수(2배정도) : 8 byte=64bit=$2 \times 2^{63} = 2 \times 9.2 \times 10^{18}$ **= 약 –100경에서 +100경**

실수(2배정도) : 8 byte=64bit=부호1bit + 지수15bit +가수48bit

15bit = $2^{15} = (-16{,}384) \rightarrow (+16{,}383)$

48bit = $2^{48} \approx 1.4 \times 10^{14}$ **= 10진수 14자리**

실수의 과학적표기법

$$x = \pm (0.a_1 a_2 \cdots a_r)_b \times b^c$$

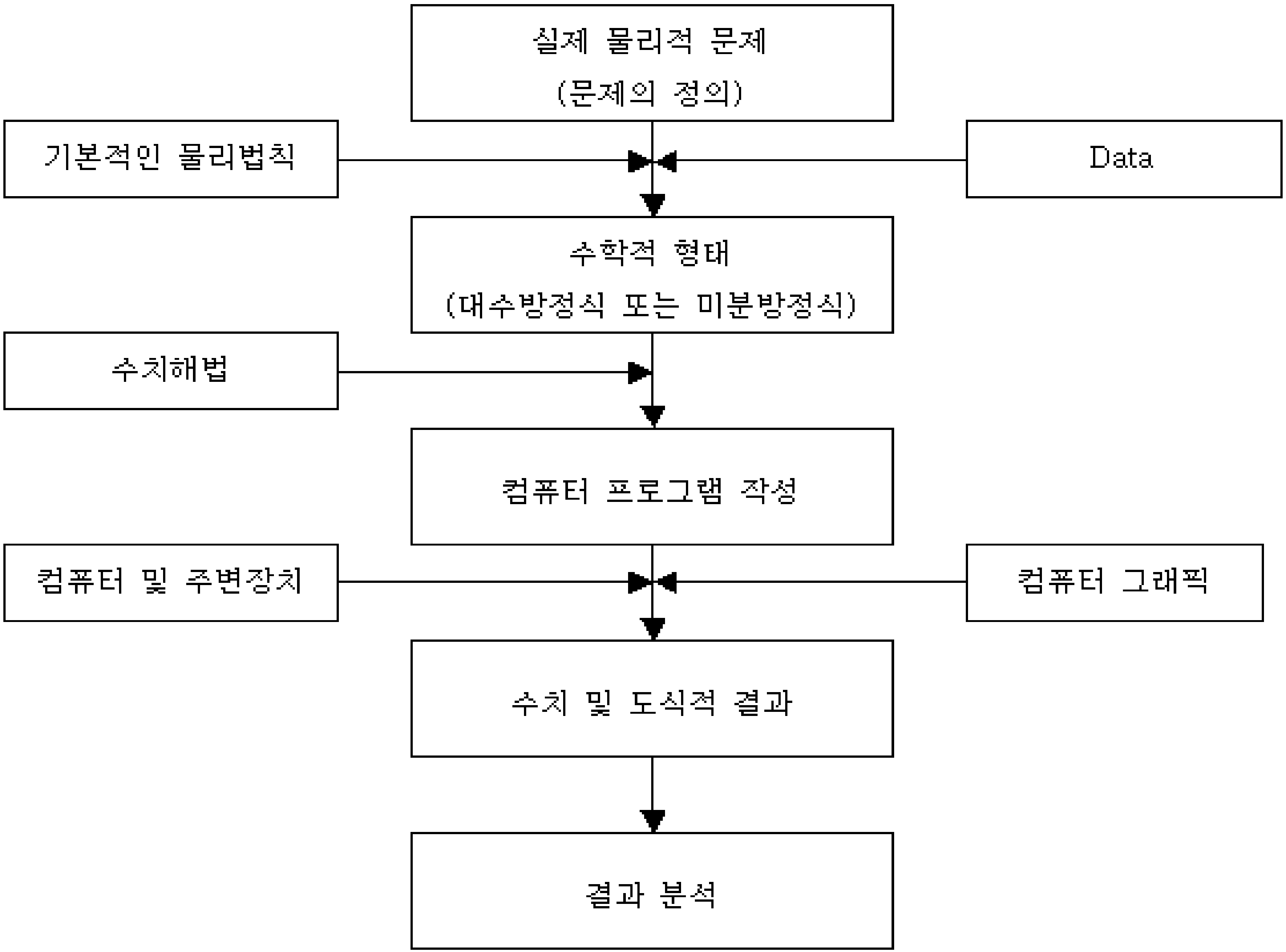
$$a_1 \neq 0,\ 0 \leq a_i < b, m \leq c \leq M$$

$(0.a_1 a_2 \cdots a_r)_b$ **: b진법의 가수(mantissa) ,**

c **:지수(exponent),** b **:기저(base)**

[문제] 가수가 3자리이고 $-2 \leq c \leq 2$ **(**c**는 정수),** $b = 5$ **인 경우 컴퓨터가 과학적표기법으로 나타낼 수 있는 실수의 개수는 몇 개인가?**

[숙제] 1배정도로 나타낼 수 있는 실수의 개수는 몇 개인가?


실제 물리적 문제
(문제의 정의)
기본적인 물리법칙
Data
수학적 형태
(대수방정식 또는 미분방정식)
수치해법
컴퓨터 프로그램 작성
컴퓨터 및 주변장치
컴퓨터 그래픽
수치 및 도식적 결과
결과 분석

오차의 종류

1. **원시오차 : 프로그램으로 수정할 수 없는 근본적인 오차.**
   1) 초기오차 : 자연현상의 수학적 모델화 과정에서의 오차
      무리수를 유한소수로 표현할 때의 오차
   2) 전환오차(최초입력) : 10진수를 2진수로 저장할 때 오차

2. **처리오차 : 프로그램으로 수정할 수 있는 오차**
   1) 절단오차 : 무한합을 유한합으로 계산할 때 오차
   2) 저장오차(중간입력) : 기억장치에 저장하기 위하여 반올림 할 때 오차

[예제] 전환오차의 예

$$(0.1)_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)_{10} = \left(\frac{1}{1010}\right)_2 \stackrel{*}{=} (0.00011001100\cdots)_2$$

따라서 $1/10$ 을 유한한 가수를 사용하는 컴퓨터에서 전환오차가 생긴다.

[숙제] 등식 $\ast$ 을 증명해 보아라.

절대오차

참값 x에 대하여 근사값을 $\tilde{x}$라고 할 때, $|x-\tilde{x}|$를 절대오차라고 한다.

상대오차

참값 x에 대하여 근사값을 $\tilde{x}$라고 할 때, $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$를 상대오차라고 한다.

유효숫자 n자리

참값x와 근사값 $\tilde{x}$에 대하여, 만약 상대오차가

$$\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-n+1}$$

이면, 근사값 $\tilde{x}$는 "유효숫자 n자리가 일치한다" 또는
"n자리의 유효숫자를 갖는다" 라고 한다.

주의 : n자리수가 정확하게 일치하는 것이 아니고, 비슷하게 일치함.

[예제] (1) $x = 1000, \tilde{x} = 1000.4$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \le 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(2) $x = 1000, \tilde{x} = 999.6$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \le 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(3) $x = 4000, \tilde{x} = 4001.6$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \le 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(4) $x = 4000, \tilde{x} = 3998.4$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \le 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

덧셈과 뺄셈

유효숫자가 작은 숫자에 맞추어 계산한다. 예를 들어, 유효숫자 세 개인 수 3.14와 유효숫자 5개인 8.9714를 더하면 산술적으로는 12.1114가 나오지만, 유효숫자가 소수점 이하 두 개 이므로 결과는 12.11이 된다.

곱셈과 나눗셈

두 측정치 중 유효숫자가 적은 쪽과 같은 유효숫자를 가진다. 예를 들어, 2.56 × 12.8690의 산술적 계산결과는 32.94464이지만, 2.56의 유효숫자가 3개이므로 유효한 결과는 32.9이다.

유효숫자의 자리수 상실

상대적으로 큰수를 곱하거나 작은수로 나누면 overflow 된다.

비슷한 크기의 숫자를 빼면 유효숫자 자리수가 상실된다.

$0.24567 - 0.24512 = 0.00055$ (유효숫자 5자리 -> 2자리)

(해결법) 수학적으로 동치인 다른 식을 변형한다.

[예제] $$\sqrt{x^2+1}-1=\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\frac{(x^2+1)-1^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$=\frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

수열의 비교 **(** $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$**)**

$\alpha_n=O(\beta_n) \Leftrightarrow (\exists\, n_0 : n>n_0 \Rightarrow |\alpha_n|\le c|\beta_n|)$**: 비슷한 속도로 0에 수렴**

$\alpha_n=o(\beta_n) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n/\beta_n \to 0 \quad$ **:** α_n**이** β_n**보다 빠르게** 0**에 수렴한다.**

[예제]

$$\frac{n+1}{n^2}=O\left(\frac{1}{n}\right),\ \frac{1}{n\ln n}=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

수열의 수렴 ($x_n \to x$)

1차적 수렴 : $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|$

2차적 수렴 : $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|^2$

p차적 수렴 : $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|^p$

[예제] $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ **은** 0**으로 1차적으로 수렴한다.**

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}} - 0\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|$$

[숙제] $x_n = 5^{-2^n}$**은** 0**으로 몇 차적으로 수렴하는지 보여라.**

제2장 비선형방정식의 해

선형방정식

$$ax+b=0$$
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=a$$
$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=b$$

해가 기하학적으로 선형(직선, 평면, 초평면)으로 나타난다.

해가 없거나, 한 개 이거나, 무한 개로 나타난다.

비선형방정식

$$ax^2+b=0 \qquad \sqrt{x}+b=0 \qquad \sin x+x^2=0 \qquad f(x)=0$$

해가 없거나, 유한 개이거나, 무한 개로 나타난다.

5차이상 다항식은 근의 공식 (근과 계수의 관계식)이 없다.

비선형방정식은 일반적으로는 유한 회수로 구할 수 없고,

반복법을 사용하여 근사값의 수열이 참값으로 수렴하도록 한다.

이분법 (p21)

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a), f(b)$가 부호가 다를 경우 방정식 $f(x)=0$의 해를 찾는 방법

입력 : $a, b, xtol, ftol, N$

For $i=1$ to N

$$e=\frac{b-a}{2}$$

$$m=\frac{b+a}{2}$$

if $e \le xtol$ or $|f(m)| \le ftol$ then stop

if $f(a)f(m)<0$ then

$b=m$

else

$a=m$

endif

[예제2.2] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ 의 근이 구간 $[-7, -5]$ 에 적어도 하나가 존재함을 보이고 이분법을 사용하여 근사값을 구하라.

(풀이)

> **[중간값의 정리] 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고**
> $m = \min\{f(x) \mid a \le x \le b\},\ M = \max\{(f(x) \mid a \le x \le b\}$
> **이면 $\forall y \in [m, M],\ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$ 이 성립한다.**

함수 $f(x) = e^x - 1.4 - \tan^{-1}x$ 는 $[-7, -5]$ 에서 연속이다.

$f(-7) \approx 0.298,\ f(-5) = -0.0198$ **이므로** $f(-5) \le 0 \le f(-7)$

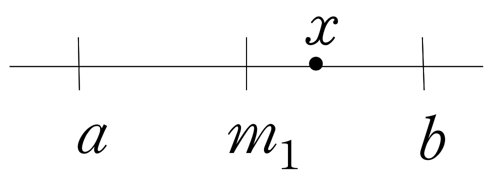
이다. 중간간값의 정리에 의하여 $\exists x \in [-7, -5] : f(x) = 0$ 이다.

이분법에서 조건을 $N = 50,\ xtol = 1.0E-7,\ ftol = 1.0E-7$ 로 놓고 실행하면 $i = 18$ 근방에서 근사값 $m = -5.682$ 을 구할 수 있다. ■

[숙제] 이분법을 사용하여 방정식 $e^x - \sin x = 0,\ x \in [-4, -2]$ 를 해를 구하라.

[예제2.3] 방정식 $x^3 - x - 2 = 0$의 근은 구간 $[1,2]$에 존재함을 보이고, 절대오차가 10^{-3}보다 작아지도록 $xtol$과 N을 구하여라.

(풀이)



$f(x) = x^3 - x - 2$ **는 구간** $[1,2]$**에서 연속이고,**

$$f(1) = -2 < 0 < 4 = f(2)$$

이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 $[1,2]$**에서 방정식** $f(x) = 0$**의 근이 존재한다.** $|x - m_1| < \dfrac{b-a}{2}$ **이고**

$$|x - m_2| < \frac{b-a}{2^2},\ \cdots\ , |x - m_i| < \frac{b-a}{2^i}$$ **이므로**

$|x - m_N| < \dfrac{b-a}{2^N} \le xtol = 10^{-3}$ **이 되게 하려면** $\dfrac{2-1}{2^N} \le 10^{-3}$ **이 되고 양변에** $\log$**를 취하면** $\log_{10}(2^{-N}) \le \log_{10}(10^{-3})$ **이 되고**

$N \ge \dfrac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96$ **그러므로** $N = 10$**이상이면 충분하다.** ■

[예제2.4] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ **의 근을 구간** $[-7, -5]$ **에서 이분법으로 구할 때 상대오차가** 10^{-5} **보다 작게 되려면 최소한 몇 번을 반복해야 하는가?**

(풀이) 상대 오차 = $\dfrac{|x - m_i|}{|x|} \le \dfrac{b-a}{|x|\,2^i} < 10^{-5}$ **이어야 한다.**

$b - a = (-5) - (-7) = 2$ **이고** $x \in [-7, -5]$**이므로** $\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{1}{5}$.

따라서 $\dfrac{2}{5 \times 2^i} < 10^{-5}$ **이 되고,** $2^{-i+2} < 10^{-4}$ **이 된다. 양변에 로그를 취하여 풀면** $i > 2 + \dfrac{4}{\log 2} \approx 15.28$ **이므로 최소** 16 **번 반복해야 한다.** ■

[숙제] 이분법을 이용하여 절대오차가 10^{-4} **보다 작은** $\sqrt{2}$ **의 근사값을 구하여라.**

가위치법 (p26)

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다를 경우,

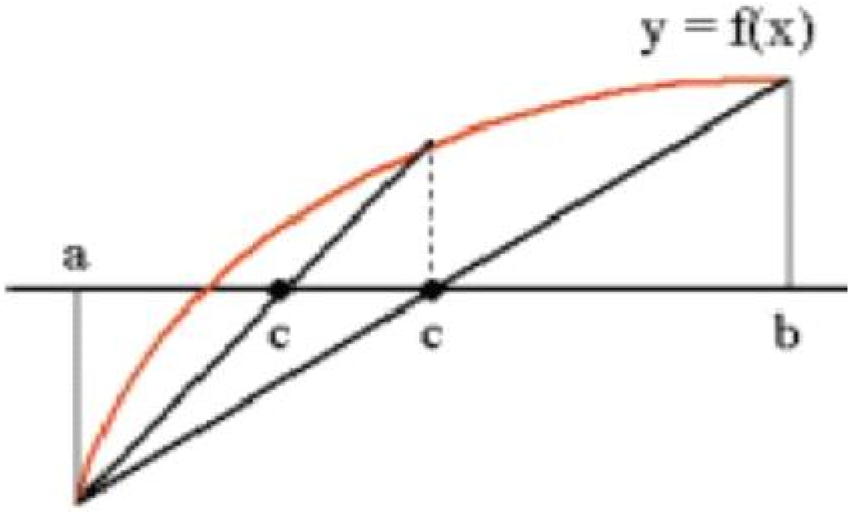
$f(x)=0$의 해를 구하는 방법으로,

두 점 $(a, f(x))$와 $(b, f(b))$을 잇는 직선의 방정식은

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a)$$

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$



가위치법 알고리즘

입력 : $a, b, xtol, ftol, N$

For $n = 1$ **to** N

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$e = |c - c_0|$$

if $e \le xtol$ **or** $|f(c)| \le ftol$ **then stop**

if $f(a)f(c) < 0$ **then**

$b = c$

else

$a = c$

endif

$c_0 = c$

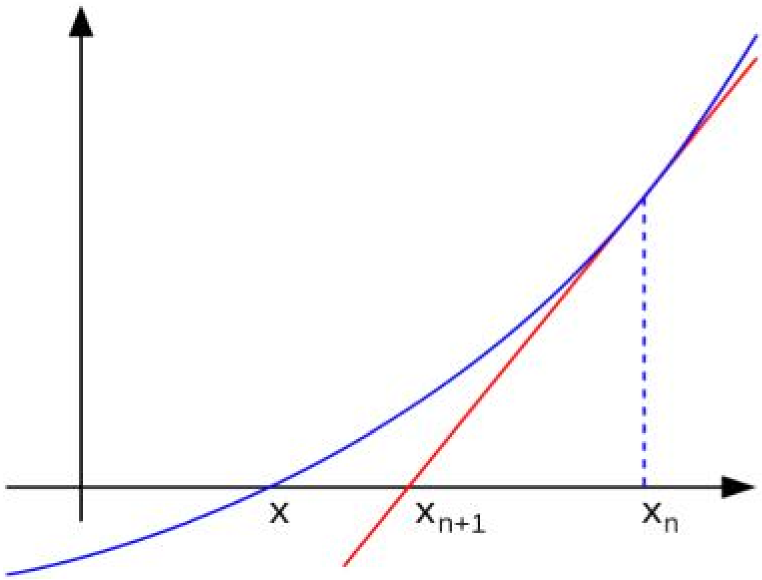
[예제2.5] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ **의 근이 구간** $[-7, -5]$ **에 존재한다. 가위치법을 사용하여 근사값을 구하라.**

(풀이)

$N = 50,\ xtol = 10^{-7},\ ftol = 10^{-7}$ **을 사용하여 가위치법의 알고리즘을 사용하여 구하면 대강** 8 **번 근방에서 근사값** $c = -5.6823$ **을 구할 수 있다. 이분법보다 수렴속도가 빠른 것을 알 수 있다.** ■

[숙제] 방정식 $e^x - \sin x = 0,\ x \in [-4, -2]$ **의 해를 가위치법으로 구하는 컴퓨터 프로그램을 하여 제출하라.**

Newton 방법



뉴톤법은 방정식 $f(x)=0$ 에서의 함수 f 가 미분가능할 때, 사용할 수 있는 수렴이 빠른 방정식이 수치해법이다. 초기 추측 x_0 에서 시작하여 n 단계의 해의 근사값 x_n 이 주어졌을 때, $(n+1)$ 단계의 근사값 x_{n+1} 은 x_n 에서의 접선이 x 축과 만나는 지점이다.

x_n 에서의 접선의 방정식

$$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$$

이 점 $(x_{n+1},0)$ 을 만족하므로

$$0=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n)$$

이 성립하고 x_{n+1} 을 구하면,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

뉴톤법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, ftol, N$
For $n = 0$ **to** N
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
if $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \le xtol$ **or** $\lvert f(x_{n+1}) \rvert \le ftol$ **then stop**

[참고] 수렴차수 구하기

$$\begin{cases} e_2 = C\, e_1^k \\ e_3 = C\, e_2^k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e_2}{e_3} = \left(\frac{e_1}{e_2}\right)^k \Rightarrow k = \frac{\log(e_2/e_3)}{\log(e_1/e_2)}$$

[예제2.6] 뉴톤법으로 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 구하여라.

(풀이) $f(x) = x^2 - 2$ **일 때** $\sqrt{2}$ **는 방정식** $f(x) = 0$ **의 근이다.**

$f'(x) = 2x$ **이므로 뉴톤의 반복식은**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

[예제2.7] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1} x = 0$ **의 근을 뉴톤법으로 구하여라.**

초기추측 $x_0 = -7$ **를 사용하여라.**

(풀이) 수렴차수가 2가 나온다.

[정리2.1] f'' **이 구간** $[a,b]$ **에서 연속이고** $f(x)=0$ **의 근** s **가 단일근일 때, 즉** $f(s)=0\neq f'(s)$ **이라면, 근의 적당히 작은 근방에서 뉴톤법의 수렴차수는 2이다.**

(증명) 테일러 정리로부터 s **와** x_n **사이에 있는** ζ_n **에 대하여,**

$$f(s)=f(x_n)+f'(x_n)(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

이 성립하므로, $f(s)=0$ **를 적용하면,**

$$0=f(x_n)+f'(x_n)(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

$$0=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

뉴톤법 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ **을 대입하면,**

$$x_{n+1} - x_n = s - x_n + \frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s - x_n)^2$$

$$s - x_{n+1} = -\frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s - x_n)^2$$

$$|s - x_{n+1}| \approx C\,|s - x_n|^2,\ \ with\ \ C = \left|\frac{f''(s)}{2\,f'(s)}\right|$$

그러므로 단일근 근처에서 뉴톤법의 수렴차수는 2이다. ■

[정리] $f^{(3)}$ **이 구간** $[a,b]$ **에서 연속이고** $f(x) = 0$ **의 근** s **가 중근일 때,**

즉 $f(s) = f'(s) = 0 \neq f''(s)$ **이라면, 뉴톤법의 수렴차수는 1이다.**

(증명) 테일러정리로 부터 s **와** x_n **사이에 있는 어떤** ζ_n **에 대하여 다음이 성립한다.**

$$f(s)=f(x_n)+f'(x_n)(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

[정리2.1]처럼 뉴톤법을 이용하여

$$s-x_{n+1}=-\frac{f''(\zeta_n)}{2f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

$f'(s)=0$ **을 이용하여**

$$s-x_{n+1}=\frac{f''(\zeta_n)}{2\dfrac{f'(s)-f'(x_n)}{(s-x_n)}}(s-x_n)$$

평균값의 정리를 이용하여, s **와** x_n **사이에 있는 어떤** ξ_n **에 대하여,**

$$s-x_{n+1}=\frac{f''(\zeta_n)}{2f''(\xi_n)}(s-x_n)$$

$$|s-x_{n+1}|\approx C|s-x_n|,\ with\, C=\left|\frac{f''(s)}{2f''(s)}\right|$$

그러므로 중근 근처에서 뉴톤법의 수렴차수는 1이다. ■

[예제2.8] $f(x)=(x+1)(x-5)^2$ **의 2개의 근을 뉴톤법으로 구하고, 각 근으로 수렴하는 근사 수열의 수렴차수를 비교하여라.**

(풀이) 초기값으로 단일근 근처에서는 $x_0=0$ **으로**

중근 근처에서는 $x_0=7$ **으로 시작하여 보자. (숙제)**

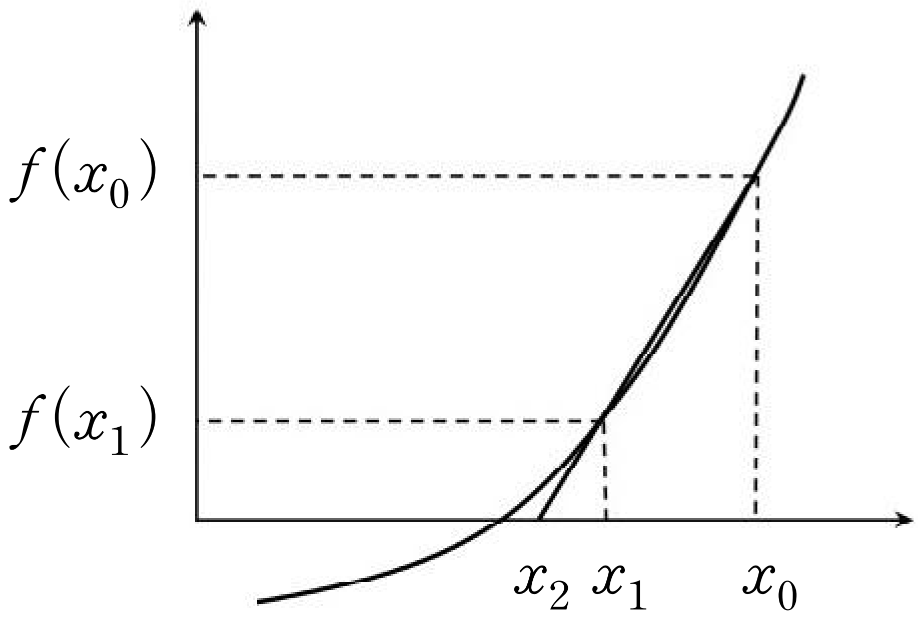
할선법

초기추측 x_0, x_1 **에 대하여,**

두 점 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ **을 지나는**

직선의 방정식

$$y=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_1)+f(x_1)$$



이 점 $(x_2, 0)$ **을 만족하므로**

$$0=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_1)+f(x_1)$$

이 성립하고, x_2을 구하면,

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

이것을 일반화 하면

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad \blacksquare$$

참고로 할선법은 아래와 같이 뉴톤법의 근사식임을 알 수 있다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

할선법 알고리즘

> **입력** : $x_0, x_{1,} xtol, ftol, N$
>
> **For** $n = 1$ **to** N
>
> $$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
>
> **if** $|x_{n+1} - x_n| \le xtol$ **or** $|f(x_{n+1})| \le ftol$ **then stop**

[정리2.2] f'' 이 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x)=0$ 의 근 s 가 단일근일 때, 즉 $f(s)=0 \neq f'(s)$ 이라면, 근의 적당히 작은 근방에서 할선법의 수렴차수는 1.62 정도 된다.

(증명) $f_n = f(x_n)$ 로 표기하면 할선법은

$$x_{n+1} = x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

양변과 우변 분자에 근 s 를 빼거나 더하면,

$$(x_{n+1} - s) = (x_n - s) - f_n \frac{(x_n - s) - (x_{n-1} - s)}{f_n - f_{n-1}}$$

오차 $e_n = x_n - s$ 을 대입하면,

$$e_{n+1} = e_n - f_n \frac{e_n - e_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$e_{n+1} = e_n - f_n \frac{e_n - e_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{e_n f_n - e_n f_{n-1} - f_n e_n + f_n e_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{f_n e_{n-1} - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

여기서 테일러정리와 $f(s) = 0$ 를 이용하면,

$$f_n = f(s) + e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n) = e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)$$

$$f_{n-1} = f(s) + e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1}) = e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})$$

이 되고 이것을 적용하면,

$$e_{n+1} = \frac{f_n e_{n-1} - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{e_{n-1}\left(e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)\right) - e_n\left(e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})\right)}{\left(e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)\right) - \left(e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})\right)}$$

여기에 $\zeta_n \approx s \approx \zeta_{n-1}$ **를 적용하고, 분모에만,** $e_n^2 \approx 0 \approx e_{n-1}^2$**을 적용하면,**

$$\approx \frac{1}{2} \frac{e_{n-1} e_n^2 f''(s) - e_n e_{n-1}^2 f''(s)}{e_n f'(s) - e_{n-1} f'(s)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} \frac{e_{n-1} e_n^2 - e_n e_{n-1}^2}{e_n - e_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} e_{n-1} e_n \frac{e_n - e_{n-1}}{e_n - e_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} e_{n-1} e_n$$

그러므로 $e_{n+1} \approx C\, e_{n-1} e_n$ **(여기서** $C = \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)}$**) 를 얻었다.**

한편 수렴차수 p **는** $e_{n+1} = C_1 e_n^p$ **로 정의된다.**

한번 더 $e_n = C_1 e_{n-1}^p$ **을 적용하면,**

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= C_1 (C_1 e_{n-1}^p)^p \\ &= C_1^{p+1} e_{n-1}^{p^2} \quad \text{---(1)} \end{aligned}$$

이 된다. 여기에 $e_{n+1} \approx C\, e_{n-1} e_n$ **로부터**

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\approx C\, e_{n-1} (C_1 e_{n-1}^p) \\ &= C C_1 e_{n-1}^{p+1} \quad \text{---(2)} \end{aligned}$$

(1),(2)로부터 $p^2 = p + 1$

$$p^2 - p - 1 = 0$$

2차방정식의 근의 공식에 따라

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 \;\blacksquare$$

[예제2.9] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1} x = 0$ 의 근을 할선법으로 구하여라.

초기추측 $x_0 = -5,\ x_1 = -7$ 를 사용하여라.

(풀이) 할선법은 뉴톤법보다 약간 느리다. 수렴차수는 1.62 근방으로 나온다.

[숙제] $x^3 - x - 1 = 0$ 의 근을 할선법을 사용하여 구하고, 수렴차수도 구하여라.

초기추측은 $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ 를 사용하여라.

고정점

실수 s 는 함수 g 의 고정점이다. $\Leftrightarrow$ $s = g(s)$

고정점반복법

방정식 $f(x) = 0$ 을 $x = g(x)$ 형태로 변형한 다음, 위와 같이 반복한다.

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

고정점반복법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, N$

  for $n=0$ **to** N

    $x_{n+1} = g(x_n)$

    if $|x_{n+1} - x_n| \le xtol$ **then stop**

[예제2.10]

방정식 $x^2 - x - 3 = 0$의 근을 고정점 반복법으로 구하기 위하여 반복함수 $g(x)$를 찾아 보아라.

(풀이)

(1) $x = x^2 - 3 \;\Longrightarrow\; g(x) = x^2 - 3$

(2) $x = \dfrac{x+3}{x} \implies g(x) = \dfrac{x+3}{x}$

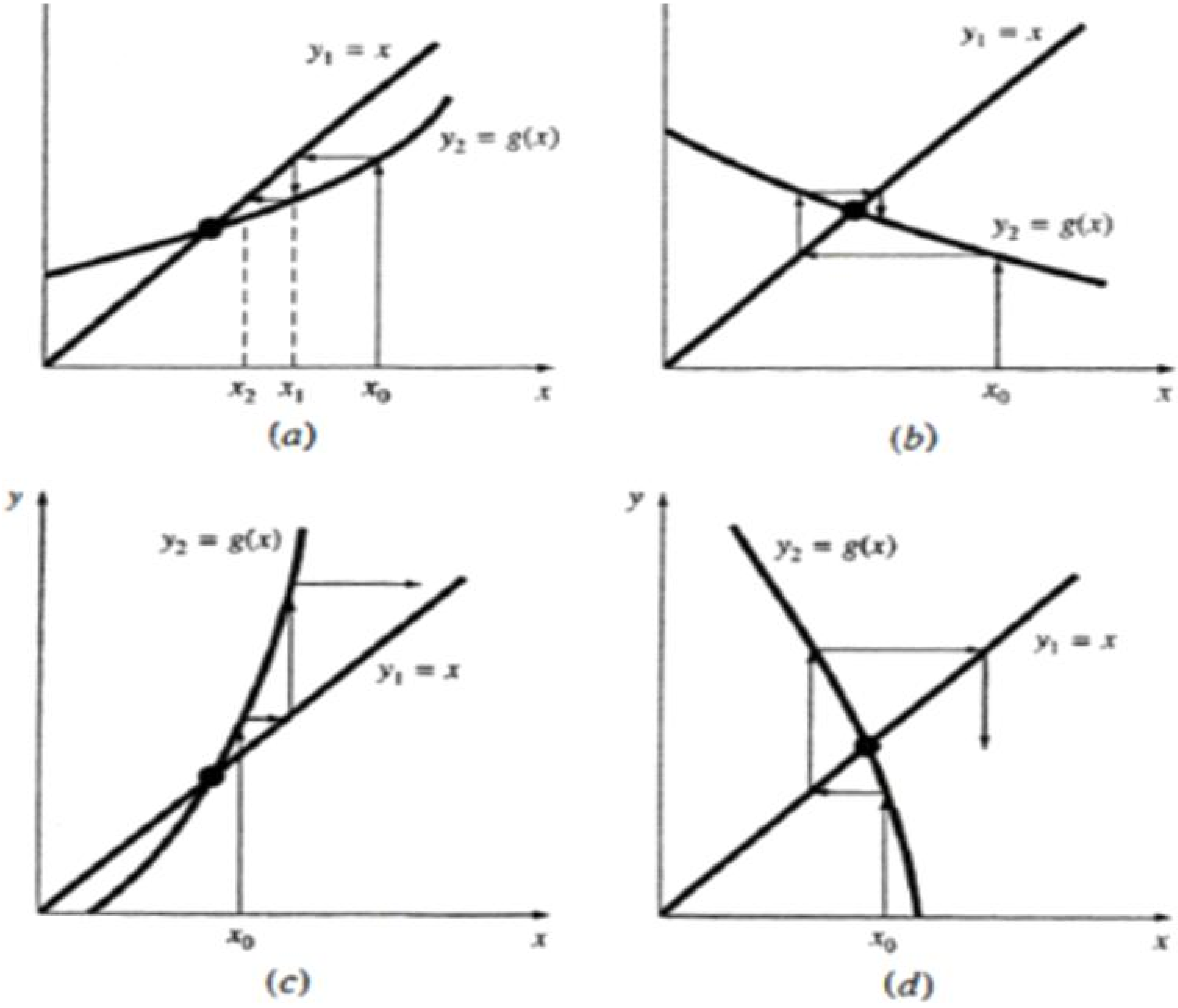
(3) $x = \sqrt{x+3} \implies g(x) = \sqrt{x+3}$

(4) $x = x + 2(x^2 - x - 3) \implies g(x) = x + 2(x^2 - x - 3)$

(5) $x = x - \dfrac{x^2 - x - 3}{2x - 1} \implies g(x) = x - \dfrac{x^2 - x - 3}{2x - 1}$

[예제2.11] **방정식** $x^2 - x - 3 = 0$ **의 근을 예제2.10의 반복함수들을 사용한 고정점 반복법으로 구하여 비교하여라.**

[숙제] p54 #6을 컴퓨터 프로그램을 실행하여 비교하여라.



$y_1 = x$
$y_2 = g(x)$
x_2
x_1
x_0
x
(a)
$y_1 = x$
$y_2 = g(x)$
x_0
x
(b)
y
$y_2 = g(x)$
$y_1 = x$
x_0
x
(c)
y
$y_2 = g(x)$
$y_1 = x$
x_0
x
(d)

[정리 2.3] (1) $\forall x \in I = [a,b],\ g(x) \in I$

(2) $\forall x \in I,\ |g'(x)| \le r < 1$

(3) 초기값 $x_0 \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = g(x_{n-1})$

$\Longrightarrow$ (1) 구간 I안에 함수 g의 고정점 s가 존재.

(2) g의 고정점은 유일하다.

(3) 수열 $\{x_n\}$은 고정점으로 수렴.

(4) $|x_n - s| \le \dfrac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0|$

(증명)

(1) 만약 $g(a) = a$ 또는 $g(b) = b$이면 고정점 존재.

$a < g(a) \wedge g(b) < b$ 인 경우, $g'(x)$가 존재하면 g는 연속이므로,

$h(x) \equiv g(x) - x$ 도 연속이다. 또한 $h(a) = g(a) - a > 0$ 이고, 또한

$h(b) = g(b) - b < 0$ 이므로, 중간값의 정리에 의하여, $h(s) = 0$ 을 만족

하는 s가 I안에 존재한다. 그러므로 $g(s)-s=h(s)=0$, 즉 $g(s)=s$인 s가 존재한다.

(2) 서로 다른 두 개의 고정점 s와 w가 있다면, 평균값의 정리에 의하여,

$$g(s)-g(w)=g'(c)(s-w)$$

인 c가 s와 w사이에 존재한다. 따라서

$$\begin{aligned}|s-w| &= |g(s)-g(w)| \\ &= |g'(c)|\,|s-w| \\ &\le r|s-w| \\ &< |s-w|\end{aligned}$$

그러므로 $|s-w|<|s-w|$ 로 모순이다. 따라서 고정점은 유일하다.

(3) 평균값의 정리에 의하여, $\forall n\in\mathrm{N}$,

$$\begin{aligned}|x_n-s| &= |g(x_{n-1})-g(s)| \\ &= |g'(c_n)|\,|x_{n-1}-s|\end{aligned}$$

$$\le r|x_{n-1}-s|$$
$$\le r^2|x_{n-2}-s|$$
$$\le r^n|x_{n-n}-s|$$

그러므로

$$|x_n - s| \le r^n|x_0 - s|$$

여기에서 $r<1$ 이므로 우변은 0 으로 수렴한다.

따라서 x_n 은 s 로 수렴한다.

(4) 삼각부등식에 의하여,

$$|s-x_0| = |s-x_1+x_1-x_0|$$
$$\le |s-x_1|+|x_1-x_0|$$
$$\le r|s-x_0|+|x_1-x_0|$$
$$(1-r)|s-x_0| \le |x_1-x_0|$$

$$|s-x_0| \le \frac{1}{1-r}|x_1-x_0| \quad \text{---(\#)}$$

그런데 위 풀이 (3)으로부터,

$$|x_n - s| \le r^n |x_0 - s|$$

$$\le r^n \left(\frac{1}{1-r}|x_1-x_0|\right) \text{ , by(\#)}$$

그러므로

$$|x_n - s| \le \frac{r^n}{1-r}|x_1-x_0| \quad \blacksquare$$

[명제] 정리2.3의 가정에, $g^{(k)}$가 연속이고,

$$0 = g'(s) = \cdots = g^{(k-1)}(s)$$
$$0 \neq g^{(k)}(s)$$

의 조건을 더하면, 수열 $\{x_n\}$의 수렴차수는 k가 된다.

(증명)

오차를 $e_n = x_n - s$ **라 할 때,**

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - s \\ &= g(x_n) - g(s) \end{aligned}$$

여기에서 함수 $g^{(k)}$**가 연속이면, by 테일러 정리,** x_n**과** s**사이에** ζ_n**이 존재하여,**

$$= g'(s)\, e_n + \frac{g''(s)}{2!} e_n^2 + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(s)}{(k-1)!} e_n^{k-1} + \frac{g^{(k)}(\zeta_n)}{k!} e_n^k$$

$$= \frac{g^{(k)}(\zeta_n)}{k!} e_n^k \text{ , } \quad \textbf{by } 0 = g'(s) = \ \cdots \ = g^{(k-1)}(s)$$

따라서, $|e_{n+1}| \approx C\, |e_n|^k$ **여기서** $C = \left| \dfrac{g^{(k)}(s)}{k!} \right|$**.**

그러므로 수렴차수는 k**가 된다. ■**

Aitken의 Δ^2 방법

고정점반복법을 가속하는 방법으로

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

여기에서 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n &= \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \\ &= (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n\end{aligned}$$

(풀이) 고정점 반복법의 근사값 수열 $\{x_n\}$ **이 고정점(참값)** s **으로 일차적으로 수렴한다고 하자. 그럼 어떤 상수** C**가 존재하여, 충분히 큰** n**에 대하여,**

$$\begin{cases} x_{n+1} - s \approx C(x_n - s) \\ x_{n+2} - s \approx C(x_{n+1} - s) \end{cases}$$

좌변끼리 나누고, 우변끼리 나누면

$$\frac{x_{n+1}-s}{x_{n+2}-s} \approx \frac{x_n - s}{x_{n+1}-s}$$

$$\Longrightarrow (x_{n+2}-s)(x_n - s) \approx (x_{n+1}-s)^2$$

$$\Longrightarrow x_{n+2}\,x_n - (x_{n+2}+x_n)s \;\approx\; x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}s$$

$$\Longrightarrow s \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx \frac{x_n(x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n)-(x_{n+1}^2-2x_{n+1}x_n+x_n^2)}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad \blacksquare$$

Steffensen방법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, N$

for $n=0$ to N

$y = g(x_n)$

$z = g(y)$

$x_{n+1} = x_n - (y-x_n)^2/(z-2y+x_n)$

if $|x_{n+1}-x_n| \le xtol$ then stop

[예제2.13] 함수 $f(x)=(x-7)(x-2\sin x)^2$ (책오타수정필요), 초기값과 종료조건을 $x_0=3,\ xtol=10^{-10}$로 하고, 반복함수 $g(x) \equiv x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$에 Steffensen법을 적용하여 중근에 대한 근사값을 구하고, 뉴톤방법은 중근에 대하여 원래는 1차적을 수렴하는데, Steffensen법으로는 더 빠른 2차적으로 수렴한다.

[숙제] 방정식 $x-e^{-x}=0$의 구간 $[0,1]$위 근의 근사값을 Steffensen 방법으로 구하라. 종료조건 $xtol=10^{-4}$ 을 사용하라.

제3장 선형연립방정식의 해법

선형대수 요약

행렬, 상삼각행렬, 하삼각행렬, 항등행렬, 전치행렬, 대칭행렬, 교대행렬

역행렬, 정칙행렬, 특이행렬, 행렬식(determinant)

정방행렬의 열공간 = 열벡터들이 (일차결합들로)생성하는 공간

= 선형변환 $y = Ax$ 의 치역

$rank(A)$ **= 열공간의 차원**

$Ker(A)$ **= 핵공간 =** $\{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = 0\}$

$null(A)$ **= 핵공간의 차원**

일차독립, 일차종속.

고유치(λ), 고유벡터(x) : $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

[정리3.2] [정리3.5] $n \times n$ **정방행렬에 대하여 다음은 동치이다.**

(1) A**가 정칙행렬이다 (즉** $\exists A^{-1}$**)**

(2) $Ax = 0$**는 단 하나의 해** $x = 0$**을 갖는다.**

(3) $Ax = b$**가 유일한 해를 갖는다.**

(4) $\det(A) \neq 0$

(5) $rank(A) = n$

(6) $null(A) = 0$

(7) 선형변환 $F(x) = Ax$ **는 단사(1-1) 함수이다.**

(8) A**가 일차독립인** n**개의 열들을 가진다.**

(9) A**가 일차독립인** n**개의 행들을 가진다.**

[정리3.7] 실수(또는 복소수) λ**는** $n \times n$ **행렬** A**의 고유치이다.**

$$\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

Gauss 소거법

[예제3.1] 다음 연립방정식을 Gauss소거법으로 풀어라.

(1) 상삼각화

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \text{ : 증가행렬}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ -7x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ [\ 2\ ] & -7 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ -12x_3 = -3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ [\ 2\ ] & [7/3] & -12 & -3 \end{array}\right]$$

(2) 후진대입법

$$x_3 = (-3)/(-12) = 1/4$$

$$x_2 = (-3 - 6x_3)/(-3) = 3/2$$

$$x_1 = (6 - 4x_2 + 2x_3)/2 = 1/4 \qquad \blacksquare$$

Gauss소거법 알고리즘

입력 : A, x, b, n

#상삼각화

for $k = 1$ **to** $n-1$
  for $i = k+1$ **to** n
    $l_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
    for $j = k+1$ **to** n
      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$
    end
    $b_i = b_i - l_{ik}b_k$
  end
end

#후진대입법

$x = b$
for $i = n$ to 1
    $s = 0$
    for $j = i+1$ to n
        $s = s + a_{ij}x_j$
    end
    $x_i = (x_i - s)/a_{ii}$
end

[숙제] p92#1(2) Gauss소거법

피벗원소(pivot element) : Gauss소거법에서 대각선에 나타난 원소

[주의] 피벗원소가 0과 가까우면 계산에서 오차가 커지고, 0이 되면 Gauss소거가 불가능하게 된다. 그런 경우 피하기 위하여, 피벗원소가 있는 행을 절대값이 큰 원소를 가진 다른 행과 교환하여 소거를 진행한다. 이것을 **피벗팅(pivoting)**이라고 한다. **전체피벗**과 **부분피벗**이 있는데, 전체피벗은 시간이 많이 걸리므로 부분피벗이 많이 이용된다.

[예제3.3] $\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 2 \\ \ \ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ **여기서 ε는 매우 작은 양수이다.**

(풀이) (1) 피벗원소가 ε인 경우

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + \qquad\qquad x_2 = 2 \\ \qquad (1-1/\varepsilon) x_2 = 3 - 2/\varepsilon \end{cases}$$

컴퓨터의 오차 계산에 따라

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3-2/\varepsilon}{(1-1/\varepsilon)} \approx \dfrac{-2/\varepsilon}{-1/\varepsilon} = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

(2) 피벗원소가 1 인 경우 (1행과 2행을 교환하여)

$$\begin{cases} \ \ x_1 + x_2 = 3 \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \qquad x_2 = 3 \\ \quad (1-\varepsilon) x_2 = 2 - 3\varepsilon \end{cases}$$

컴퓨터의 오차 계산에 따라

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-3\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \approx \dfrac{2}{1} = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

한편, 위 연립방정식의 정확한 해는 $x_1 = \dfrac{1}{1-\varepsilon},\ x_2 = \dfrac{2-3\varepsilon}{1-\varepsilon}$ **이므로**

참값은 $x_1 \approx 1,\ x_2 \approx 2$ **이다. 즉 (2)가 바른 방법이다.** ■

(숙제) 부분피벗Guass소거법 (필기로 풀기) (예제3.4참조)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

행렬의 기본행연산

(1) 서로 다른 두 행을 바꾼다. (row exchange)

(2) 한 행을 $k(\neq 0)$배 한다.

(3) 한 행에 다른 행의 k배를 더한다.

행렬의 행동치(동치관계)

행렬에 기본행연산을 유한번 행하여 얻은 행렬은 원래 행렬과 행동치이다.

Gauss소거 연립선형방정식 해법

증가행렬과 행동치인 상삼각행렬을 만들어 후진대입법으로 푼다.

기본행렬(3가지 타입)

항등행렬에 기본행연산(3가지 타입)을 행하여 만든 행렬.

(예) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3×3 단위행렬의 첫행에 -2를 곱하여 3째행에 더한다.

기본행렬의 성질

(1) 행렬에 기본행연산을 하는 것이나 그 기본행연산을 항등행렬에 행하여 얻어지는 기본행렬을 그 행렬의 왼쪽에서 곱한 것이나 같은 결과를 준다.

(2) 기본행렬의 역행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 기본행렬들의 곱

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(숙제) p102#8 기본행렬들의 곱

LU 분해법

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= L\,U$$

LU분해후 연립선형방정식 해법

$$Ax = b \iff LUx = b$$

$$\iff Ly = b \ \wedge \ Ux = y$$

[예제3.6]

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

먼저, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **를**

전진대입법으로 풀면 $y_1 = 1,\ y_2 = -1/2,\ y_3 = -7/5$

다음으로 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -7/5 \end{bmatrix}$ **를**

후진대입법으로 풀면 $x_3 = -7/16,\ x_2 = 1/16,\ x_1 = 11/16$ ■

[정의3.15]

벡터공간 V**에 대하여, 함수** $\|\cdot\|: V \to \mathrm{R}$ **를 벡터노름(norm)이라 한다.**

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **(1)** $\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{R},\ \forall x \in V,\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

(3) $\forall x, y \in V,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(삼각부등식)**

(4) $(\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ )$

[정의] 벡터공간에서 $x_n \to x \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \|x_n - x\| \to 0$

노름(norm)의 예

벡터 공간 $V = \mathrm{R}^n$**의 원소** $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$**에 대하여 다음 정의되는 함수들은 노름이 된다.**

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

[예제3.9] 벡터 $x=[3,-2,4]^T$**에 대하여,** $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ **를 구하여라.**

행렬의 노름

$$\|A\| \overset{\text{정의}}{=} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

벡터노름에 따라

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}, \quad \|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad \|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

행렬노름의 성질

(1) $\|A\| \geq 0$

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$

(4) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(5) $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$

(6) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

(7) $\|I\| = 1$, I는 항등행렬

(증명) (5) $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ **이므로**

모든 $x \neq 0$**에 대하여**

$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ **이다. 그러므로** $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$ **이다.**

모든 $x = 0$**에 대하여,** $Ax = 0$**이고** $\|0\| = 0$**이므로**

$\|Ax\| = 0 = \|A\| \, \|x\|$ **이므로 역시 성립한다.** ■

[정리3.18] $n \times n$ **행렬** $A = [a_{ij}]$**에 대하여,**

(1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ **(2)** $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

(증명)

(1) $\|Ax\|_\infty = \| \, [\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j] \, \|_\infty$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| |x_j|$$

$$\le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right) \|x\|_\infty$$

$x \neq 0$ **에 대하여,**

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right)$$

그러므로 $\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right)$ **--[1]**

반대방향의 부등호를 보이기 위하여 특별한 x **를 선택하여 보자.**

$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|$ 들 중에서 $i=k$에서 최대값을 가진다고 할 때, 즉

$$\max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}| = |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}|$$

라고 할 때, $x=[x_j]$를 다음과 같이 정의하자.

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{a_{kj}}{|a_{kj}|}, & a_{kj} \neq 0 \\ 1, & a_{kj} = 0 \end{cases}$$

그러면 모든 $|x_j|=1$이 되어 $\|x\|_\infty = 1$ 임을 알 수 있다. 그래서

$$\|Ax\|_\infty = \|[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j]\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|$$

$$\ge |\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j| \ge |\sum_{\substack{j=1 \\ a_{kj} \neq 0}}^{n} a_{kj} \frac{a_{kj}}{|a_{kj}|}|$$

$$\geq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ a_{kj} \neq 0}}^{n} \frac{|a_{kj}|^2}{|a_{kj}|} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

그러므로

$$\|Ax\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

그런데 $\|x\|_\infty = 1$ 이므로

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

따라서

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right) \quad \text{--[2]}$$

[1],[2] 에 의하여 결론이 증명되었다. ■

[예제3.10] 다음 행렬 A에 대하여 $\|A\|_\infty$와 $\|A\|_1$을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

(풀이)

(1) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{9, 6, 10\} = 10$

(2) $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{7, 9, 9\} = 9$ ■

조건상수

A가 정칙행렬(=역행렬를 가진 행렬)일 때,

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

을 A의 조건상수라고 한다.

[예제3.11] 다음 행렬의 조건상수를 $\|\cdot\|_\infty$ 을 사용하여 구하여라.

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (0<\varepsilon<1)$$

(풀이)

$$A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$ **이므로**

$$\|A_\varepsilon\|_\infty = 2+\varepsilon,\ \|A_\varepsilon^{-1}\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon^2}(2+\varepsilon)$$ **이다 따라서**

$$\varkappa(A) = \|A\|_\infty\ \|A^{-1}\|_\infty = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \quad \blacksquare$$

[참고]

예제3.11에서 ε 이 0 (zero)로 가면 행렬 A_ε 는 비정칙행렬로 가까이 간다. 그 때 조건상수는 무한히 커진다. 한편 A가 정칙 행렬이면

$$1 = \|I\| = \|A\,A^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| = \varkappa(A)$$ **이다.**

잉여벡터(residual vector) : $b - A\tilde{x}$

[정리3.20] A가 정칙행렬일때 선형연립방정식 $Ax = b\ (b \neq 0)$의

참해를 x^* 라고 하고, 근사해를 $\tilde{x}$ 할 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{\varkappa(A)} \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \leq \varkappa(A) \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|}$$

(둘째 부등식 증명)

$$b - A\tilde{x} = Ax^* - A\tilde{x}$$

$$= A(x^* - \tilde{x})$$ 이므로

$$x^* - \tilde{x} = A^{-1}(b - A\tilde{x})$$ 이다.

따라서

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - A\tilde{x})\|$$

$$\leq \|A^{-1}\| \, \|b - A\tilde{x}\| \quad \text{--[1]}$$

한편 $b = Ax^*$ **로부터,**

$$\|b\| = \|Ax^*\|$$

$$\leq \|A\|\,\|x^*\|$$

따라서

$$\frac{1}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \text{--[2]}$$

[1], [2] 로부터

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|(b - A\tilde{x})\|}{\|b\|}$$

$$= \varkappa(A)\,\frac{\|(b - A\tilde{x})\|}{\|b\|} \qquad \blacksquare$$

(숙제) 위 예제3.20 의 첫 번째 부등식 증명

불량조건행렬

정리3.20 으로부터 조건상수가 크면 잉여벡터의 크기 $\|b - A\tilde{x}\|$가 아무리 작더라도 근사해 $\tilde{x}$의 참해 x^*에 대한 상대오차 $\dfrac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|}$가 커질수 있다 것을 알 수 있다. 이와 같이 조건상수가 큰 행렬을 **불량조건행렬**(ill-conditioned matrix)라고 한다.

그러니까 불량조건이면 벡터 b(보통 실험 관찰에서 얻어지는 수치)의 조그만 오차에도 근사해의 오차가 커질 수 있다는 점을 알 수 있다.

선형연립방정식($Ax = b$)해법

1) **직접법** : 가우스소거법(LU분해법) - 많은 연산량과 기억량 필요
2) **간접법** : 반복법 – 적은 연산량과 기억량 필요.

행렬(A) 분할

$A = M - N$ 여기에서 M 은 정칙행렬($\exists\, M^{-1}$).

반복법(iterative method)

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

초기(추측)벡터 $x^{(0)}$

k 단계 근사수열 $x^{(k)}$: $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b,\ k = 1, 2, 3, \cdots$

[정리 3.22] 반복법 수렴의 조건

행렬의 분할 $A = M - N$에 대하여, 만약 $\|M^{-1}N\| \le \alpha < 1$ 이면, 임의의 초기벡터에 $x^{(0)}$ 에 대하여, 반복법 $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ 에 의하여 주어진 수열 $< x^{(k)} >$ 는 $Ax = b$의 정확한 해 x^*에 수렴한다

또한

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \alpha^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

(증명)

정확한 해 x^* **는 방정식** $Ax = b$ **을 만족하므로** $Ax^* = b$ **이다.**

그러므로

$$Ax^* = b \;\Rightarrow\; (M - N)x^* = b$$

$$\Rightarrow\; Mx^* = Nx^* + b$$

$$\Rightarrow\; M(x^{(k)} - x^*) = Mx^{(k)} - Mx^*$$

$$= (Nx^{(k-1)} + b) - (Nx^* + b)$$

$$= N(x^{(k-1)} - x^*)$$

$$\Rightarrow\; (x^{(k)} - x^*) = M^{-1}N(x^{(k-1)} - x^*)$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \ \|x^{(k)} - x^*\| &= \|M^{-1}N(x^{(k-1)} - x^*)\| \\
&\le \|M^{-1}N\|\,\|x^{(k-1)} - x^*\| \\
&\le \alpha\,\|x^{(k-1)} - x^*\|
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)} - x^*\| \le \alpha\,\|x^{(k-1)} - x^*\|$ **-- [1]**

$\le \alpha\,\alpha\|x^{(k-2)} - x^*\|$ **by [1]**

$$
\begin{aligned}
&\le \alpha^2\,\|x^{(k-2)} - x^*\| \\
&\le \cdots \\
&\le \alpha^k\,\|x^{(0)} - x^*\|
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)} - x^*\| \le \alpha^k\,\|x^{(0)} - x^*\|$ **-- [2]**

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)} - x^*\| \longrightarrow 0$ **since** $\alpha^k \longrightarrow 0$ **as** $k \longrightarrow \infty$

$\Longrightarrow \ x^{(k)} \longrightarrow x^*$

두 번째 부등식을 증명해 보자.

$$\|x^{(0)} - x^{*}\| = \|x^{(0)} - x^{(1)} + x^{(1)} - x^{*})\|$$

$$\le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \|x^{(1)} - x^{*})\|$$ **, by 삼각부등식**

$$\le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \alpha\|x^{(0)} - x^{*})\|$$

$$\Longrightarrow (1-\alpha)\|x^{(0)} - x^{*}\| \le \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

$$\Longrightarrow \|x^{(0)} - x^{*}\| \le \frac{1}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$ **--[3]**

[2]로부터, $\|x^{(k)} - x^{*}\| \le \alpha^{k}\|x^{(0)} - x^{*}\|$

$$\le \frac{\alpha^{k}}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$ **by [3]**

그러므로

$$\|x^{(k)} - x^{*}\| \le \frac{\alpha^{k}}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\| \quad \blacksquare$$

[설명]

정리3.22 로부터, 수렴하기 위한 충분조건으로 $\|M^{-1}N\| < 1$인 분할 $A = M - N$을 찾아야 하고, $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ 와 같이 각 단계에서 $x^{(k)}$를 얻으려면 M을 계수로 갖는 연립방정식을 쉽게 풀 수 있어야 한다.

Rechardson 방법

$M = I$ 으로 선택하면, $N = I - A$가 된다. 그러므로

$$x^{(k)} = (I - A)x^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

Jacobi 방법

$M = D$ 으로 선택하면, $N = -L - U$ 가 된다. 그러므로

$$Dx^{(k)} = (-L - U)x^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

여기서 $A = L + D + U$, D:대각행렬, L:하삼각행렬, U:상삼각행렬

Gauss-Seidel 방법

$M = L + D$ 으로 선택하면, $N = -U$ 가 된다. 그러므로

$$(D+L)x^{(k)} = -Ux^{(k-1)} + b \ , \ k = 1,2,3,\cdots$$

여기서 $A = L + D + U$, D:대각행렬, L:하삼각행렬, U:상삼각행렬

[정의3.23]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \ 1 \le {}^{\forall} i \le n, \ \left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \right) < |a_{ii}|$$

[정리3.24]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이면, 임의의 초기벡터 $x^{(0)}$에 대하여, Jacobi 방법은 항상 $Ax = b$ 의 해에 수렴한다.

(증명)

정리3.22에 의하여 $\|D^{-1}(-L-U)\| < 1$**를 보이면 된다.**

노름은 아무나 선택해도 되므로, $\|D^{-1}(-L-U)\|_\infty < 1$ **을 보이자.**

$$D^{-1}(-L-U)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|D^{-1}(-L-U)\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right)$$ **by 정리3.18**

그런데 A**가 강대각지배행렬이므로,** $1 \le {}^{\forall} i \le n$**,**

$$\left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \right) < |a_{ii}|$$

따라서,

$$\left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$$

그러므로

$$\|D^{-1}(-L-U)\|_{\infty} < 1 \qquad \blacksquare$$

[정리3.29]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이면, 임의의 초기벡터 $x^{(0)}$에 대하여, Gauss-Seidel 방법은 항상 $Ax=b$의 해에 수렴한다.

Jacobi 방법 실행

$$Ax=b$$

$$(L+D+U)x=b$$

$$Dx=(-L-U)x+b$$

$$Dx^{(k)}=(-L-U)x^{(k-1)}+b\ ,\ k=1,2,3,\cdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{lcccccc}
a_{11}x_1^{(k)} = & 0 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(k-1)} & +b_1 \\
a_{22}x_2^{(k)} = & -a_{21}x_1^{(k-1)} + & 0 & -a_{23}x_3^{(k-1)} & \cdots & -a_{2n}x_n^{(k-1)} & +b_2 \\
\cdots = & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{nn}x_n^{(k)} = & -a_{n1}x_1^{(k-1)} & -a_{n2}x_2^{(k-1)} & -a_{n3}x_3^{(k-1)} & \cdots & 0 & +b_n
\end{array}
$$

Jacobi 알고리즘

입력 : $n, A, x^{(0)}, b, kmax$
for $k=1$ **to** $kmax$
  for $i=1$ **to** n
    $s=0$
    for $j=1$ **to** n
      if($j \neq i$ **)** $s=s-a_{ij}x_j$
    end
    $y_i=(s+b_i)/a_{ii}$
  end
  $x=y$
end

(숙제) p122 #6(2) Jac법

Gauss-Seidel 방법 실행

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(D + L)x = -Ux + b$$

$$(D + L)x^{(k)} = -Ux^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

$$D\,x^{(k)} = -Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{lcccccccc}
a_{11}x_1^{(k)} = & 0 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & -a_{14}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(k-1)} & +b_1 \\
a_{22}x_2^{(k)} = & -a_{21}x_1^{(k)} & + \quad 0 & -a_{23}x_3^{(k-1)} & -a_{24}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{2n}x_n^{(k-1)} & +b_2 \\
a_{33}x_3^{(k)} = & -a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & + \quad 0 & -a_{34}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{3n}x_n^{(k-1)} & +b_3 \\
\cdots = & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{nn}x_n^{(k)} = & -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -a_{n3}x_3^{(k)} & \cdots & \cdots & 0 & +b_n
\end{array}
$$

Gauss-Seidel 알고리즘

입력 : $n, A, x^{(0)}, b, kmax$
for $k=1$ **to** $kmax$
    for $i=1$ **to** n
        $s=0$
        for $j=1$ **to** n
            if($j \neq i$ **)** $s=s-a_{ij}x_j$
        end
        $x_i=(s+b_i)/a_{ii}$
    end
end

(숙제) p122 #6(2) G-S법

제4장 행렬의 고유치 문제

고유벡터와 고유치

$n \times n$ 정방행렬 A에 대하여 n차원 벡터 $\mathrm{x}\,(\neq 0)$를 A의 **고유벡터 (eigen vector)**라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ($\exists$ 상수 λ, 벡터 $\mathrm{x} \neq 0$: $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$)

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ($(\mathrm{x} \neq 0,\ \mathrm{y} = A\mathrm{x}) \Rightarrow \mathrm{x} // \mathrm{y}$)

: 행렬로 선형변환하여도 방향을 바꾸지 않은 벡터.

여기에서 상수 λ를 A의 **고유치(eigen value)** 라고 한다.

고유치와 고유벡터을 묶은 쌍을 (λ, x)를 A의 **고유쌍(eigen pair)** 라고 한다.

고유방정식 (특성방정식)

λ 에 관한 방정식 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$ 을 풀기 위하여 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$을 변형하면

$$(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$$

가 되고, 0 이 아닌 벡터 x 가 위 식의 영이 아닌 해가 되기 위한 필요충분조건은

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

이다. 위 방정식을 **고유방정식**(eigen equation) 또는 **특성방정식**(characteristic equation)이라고도 한다.

고유치 해법

$n \times n$ 정방행렬 A 에 대한 고유방정식은 λ 에 대한 n 차 대수 방정식이므로 중근이 없다면 최대 n 개의 고유치가 있을 수 있다. 고유치를 구하려면 n 차방정식을 풀면 되지만, 5차이상은 근의 공식이 없고, 고차방정식은 계수들의 작은 오차에도 근의 근사값의 오차가 크다. 따라서 고유치를 구하기 위하여는 반복법과 같은 다른 접근이 필요하다.

고유벡터의 비유일성과 고유공간

행렬 A의 고유벡터 $\mathbf{x}$의 스칼라 k배인 $k\mathbf{x}$도 A의 고유벡터가 된다. 왜냐하면,

$$A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\lambda\mathbf{x} = \lambda(k\mathbf{x})$$

즉 $A(k\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$

이다. 어떤 고유치 λ에 대응하는 모든 고유벡터들의 집합을 고유공간(eigen space)이라고 한다.

고유벡터의 일차독립성

어떤 행렬 A의 서로 다른 고유치에 해당하는 고유벡터는 일차독립이다.

(증명) $(\lambda_1, \mathbf{x}_1), (\lambda_2, \mathbf{x}_2), \cdots, (\lambda_n, \mathbf{x}_n)$, $(\forall i, j,\ \lambda_i \neq \lambda_j)$**를 고유쌍들이라고 하자.**

만약 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_j$, $j < n$ 가 일차독립인 최대갯수라고 가정하면

모두는 0이 아닌 상수들 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$가 존재하여

$$\mathbf{x}_{j+1} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\mathbf{x}_j \quad \text{--(1)}$$

로 표시된다. 양변에 행렬 A를 곱하여

$$A\mathbf{x}_{j+1} = A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\mathbf{x}_j)$$

$$\lambda_{j+1}\mathbf{x}_{\mathrm{j}+1} = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j A\mathbf{x}_j$$

$$\lambda_{j+1}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{\mathrm{j}}\mathbf{x}_j) = \alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\lambda_{\mathrm{j}}\mathbf{x}_j$$

$$\alpha_1(\lambda_{j+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \alpha_2(\lambda_{\mathrm{j}+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j(\lambda_{\mathrm{j}+1} - \lambda_{\mathrm{j}})\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

$\beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ 여기에서 $\beta_k = \alpha_k(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$.

그런데 (1)에서 $\exists\, \alpha_k \neq 0$ 이므로 $\exists\, \beta_k = \alpha_k(\lambda_{j+1} - \lambda_k) \neq 0$ 이다.

이것은 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_j$ 가 일차독립이라는 사실에 모순이다. 따라서

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ 들 중에서 일차독립인 최대갯수 j는 $j < n$이면 안된다.

즉 $j = n$이어야 한다. ■

[주의] 서로 다른 고유치의 수와 대응하는 고유벡터 수는 일치하지 않는다.

[예제 4.1]

행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **의 고유치** λ_1, λ_2 **는 모두** 0 **이지만, 대응하는 고유벡터는**

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **뿐이다.**

행렬 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **의 고유치** λ_1, λ_2 **는 모두** 1 **이지만, 대응하는 고유벡터는**

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **이다.**

[숙제] p127 #2

유사행렬(similar matrix)

$n \times n$ 정방행렬 A, B 에 대하여,

B 는 A 의 유사변환이다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists S : B = SAS^{-1}$

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ A, B 는 유사하다. ($A \overset{s}{\sim} B$)

(주의) $\overset{s}{\sim}$ 는 $n \times n$ 정방행렬들에서 동치관계이다.

그러므로 B 가 A 의 유사변환이면 A 도 B 의 유사변환이다.

[정리4.2] 행렬 A의 고유쌍이 (λ, x)이고 $B = SAS^{-1}$이면, $(\lambda, S\mathrm{x})$는 B의 고유쌍이 된다.

(증명) $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x} \Rightarrow S^{-1}BS\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$

$\Rightarrow BS\mathrm{x} = S\lambda\mathrm{x}$ 양변에 왼쪽에 S를 곱하여

$= \lambda S\mathrm{x}$

$\Rightarrow B(S\mathrm{x}) = \lambda(S\mathrm{x})$

[정리4.3] Schur 정리

모든 $n \times n$ 행렬은 삼각행렬과 유사하다.

[주의] Schur 정리는 삼각행렬의 존재성만 보여주고, 삼각행렬을 계산하는 방법은 제공하지 않는다. (상, 하)삼각행렬과 대각행렬의 고유치는 그 대각원소의 값들이 된다.

벡터의 직교

두 벡터 x, y 가 $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} = 0$ 를 만족하면 두 벡터는 직교(orthogonal)하다.

직교행렬

정방행렬 Q가 $Q^TQ = QQ^T = I$를 만족 하면 행렬 Q를 직교행렬 (orthogonal matrix)라고 한다.

[정리4.5] $n \times n$ 행렬 A 이 대칭행렬이면,

(1) 모든 고유치 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 가 실수이다.

(2) 직교하는 n 개의 단위 고유벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots \mathrm{v}_n$ 들이 존재한다.

(3) 고유벡터 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots \mathrm{v}_{\mathrm{n}}$ 들이 기저를 이룬다. 즉 모든 벡터들은 고유벡터들의 일차결합으로 표시된다.

(4) 대각행렬 $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $Q = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_n]$ 라고 하면 $A = QDQ^{-T}$ or $D = Q^{-T}AQ$ 가 된다.

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v}_n \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= Q\mathbf{x}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{v} \arrow[r, "\mathbf{w} = A\mathbf{v}"] \arrow[d, "\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{v}"'] & \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{w} \\
\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{x} \arrow[r, "\mathbf{y} = D\mathbf{x}"'] & \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{y} \arrow[u, "\mathbf{w} = Q\mathbf{y}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{w} = QDQ^{-1}\mathbf{v}$

$\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{v}$

$\mathbf{y} = DQ^{-1}\mathbf{v}$

그러므로 $A = QDQ^{-1}$ **또는** $D = Q^{-1}AQ$ **이다.**

(주의) Q **는 직교행렬이므로** $Q^{-1} = Q^T$ **이다.**

[숙제] p132 예제 4.2 (필기 숙제)

거듭제곱법(멱방법)

$n \times n$ 실수행렬 A 이 n 개의 고유치 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 와 일차독립인 고유벡터 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 를 가지고

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

를 만족한다고 가정하자. 임의의 초기벡터 $\mathbf{x}_0$ 에 대하여, 반복법

$$\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0, \ k = 1, 2, \cdots$$

을 **거듭제곱법**(power method)라고 한다. 실제 실행할 때, $\mathbf{x}_k$의 크기가 너무 크거나 작아지면, 오차 발생이 커지므로, 도중에 적당히 크기 조절을 해준다.

[정리] 거듭제곱방법에서 벡터 $\mathbf{x}_k$ 는λ_1 절대치가 가장 큰 고유치 에 대응하는 벡터 $\mathbf{v}_1$에 수렴한다.

(증명)

고유벡터 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 들이 일차독립이므로 초기벡터 $\mathbf{x}_0$ 는 고유벡터들의

일차결합으로 표시될 수 있다.　　즉

$$\exists\, c_1, \cdots, c_n : \mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\ &= A^k(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathrm{c}_n\mathbf{v}_n) \\ &= c_1A^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_nA^k\mathbf{v}_n \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n \\ &= \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_n\right)\end{aligned}$$

그런데, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$ **로부터**

$$1 > \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \geq \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} \geq \cdots \geq \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

이므로 $k \to \infty$ 에 따라, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| \to 0 \ \ (2 \le \forall i \le n)$ 이므로

$$\mathbf{x}_k \to C\mathbf{v}_1$$

와 같이 수렴한다. ■

거듭제곱법에서 고유치구하기

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

이므로 $1 \le i \le n$ 인 어떤 i에 대하여 $(\mathbf{x}_k)_i$ 는 $\mathbf{x}_k$의 i번째 성분이고,

고유치의 근사값은 $\lambda_1 = (\mathbf{x}_{k+1})_i / (\mathbf{x}_k)_i$ 로 계산될 수 있다.

[예제4.4] 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$에 초기벡터 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$를 이용하여 거듭제곱 방법을 실행하여 절대치가 가장 큰 고유치와 대응하는 고유벡터를 구하여라.

[숙제] p149 1-(1) : 거듭제곱법

역거듭제곱법

정칙행렬 A의 고유치 $\lambda_i(\neq 0)$와 고유벡터 v_i에 대하여 고유방정식 $A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i$ 의 양변에 역행렬 A^{-1}을 곱하면

$$\mathrm{v}_i = A^{-1}(\lambda_i \mathrm{v}_i)$$

$$\mathrm{v}_i = \lambda_i A^{-1}(\mathrm{v}_i)$$

$$\frac{1}{\lambda_i}\mathrm{v}_i = A^{-1}(\mathrm{v}_i)$$

$$A^{-1}(\mathrm{v}_i) = \frac{1}{\lambda_i}\mathrm{v}_i$$

따라서 역행렬 A^{-1}은 고유치 $\frac{1}{\lambda_i}$ 와 고유벡터 v_i 를 갖는다. 즉 역행렬에 거듭제곱방법을 적용하면 절대치가 가장 작은 고유치를 구할 수 있다. 이 방법을 **역거듭제곱법**(inverse power method)라고 한다.

[예제] 역거듭제곱법으로 절대치가 가장 작은 고유치와 그 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

이동된역거듭제곱법(shifted inverse power method)

고유치가 아닌 특정상수 a에 대하여 고유방정식 $A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i$ 으로부터 $aI\mathrm{v}_i = a\mathrm{v}_i$ 를 양변에서 빼면

$$A\mathrm{v}_i - aI\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i - a\mathrm{v}_i$$

$$(A - aI)\mathrm{v}_i = (\lambda_i - a)\mathrm{v}_i$$

$$(A - aI)^{-1}\mathrm{v}_i = \frac{1}{\lambda_i - a}\mathrm{v}_i$$

그러므로 행렬 $(A - aI)^{-1}$에 거듭제곱방법을 적용하면 고유치

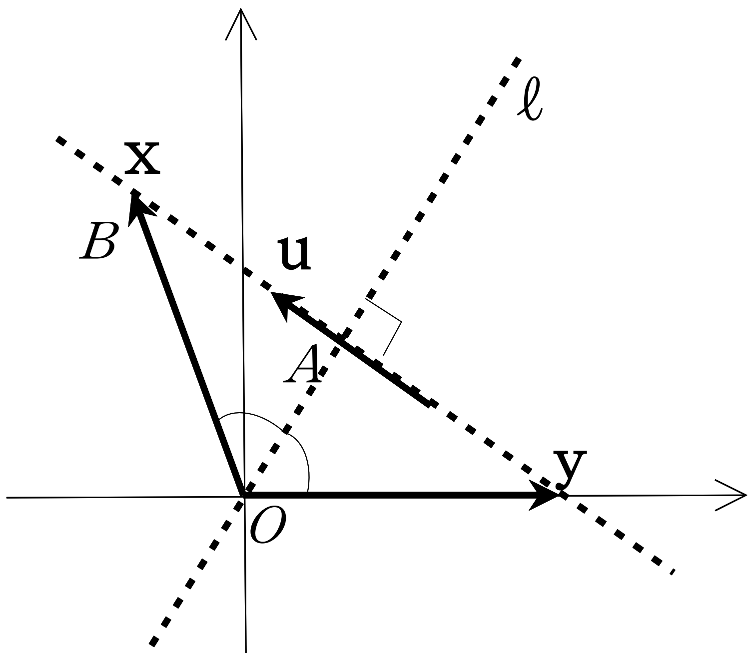
$$\frac{1}{\lambda_1 - a}, \frac{1}{\lambda_2 - a}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n - a}$$

중에서 절대치가 가장 큰 고유치 $\frac{1}{\lambda_k - a}$와 그에 대응하는 고유벡터 v_k를 구할 수 있다. 그것으로부터 행렬 A의 고유치 중에서 특정상수 a에 가장 가까운 고유치 λ_k와 그에 대응하는 고유벡터 v_k를 구할 수 있다. 이 방법을 **이동된역거듭제곱법(shifted inverse power method)**라고 한다.

[숙제] p148 예제4.5 : 이동된역거듭제곱법 ($a = 7.0$)

Householder 변환

크기가 같은 두 벡터 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 종점을 잇는 선분의 수직이등분선 ℓ을 기준선으로 벡터들을 대칭(거울)변환하는 것을 Householder 변환이라고 한다. 대칭변환이기 때문에 한번 더 변환하면 원래로 돌아온다. 즉 $HH = I$가 된다.



선분 $\overline{AB}$ 의 길이는 단위벡터 $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$ 를 이용하여 내적 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}$ 로 주어지고, 벡터 $(\mathbf{x}-\mathbf{y})$는 $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$ 로 주어진다.

그러므로 $\mathrm{y} = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{x} - 2(\mathrm{u} \cdot \mathrm{x})\mathrm{u} \;= \mathrm{x} - 2\mathrm{u}\,(\mathrm{u} \cdot \mathrm{x}) \\
&= \mathrm{x} - 2\mathrm{u}\,(\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}) \;= \mathrm{x} - 2\,(\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}})\mathrm{x} \\
&= (I - 2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}})\mathrm{x} \overset{\text{정의}}{=} H\mathrm{x}
\end{aligned}
$$

여기에서 행렬 $H = (I - 2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{T})$ 를 **Householder 행렬**이라고 한다. 이 행렬을 이용하면 어떤 벡터를 원하는 좌표축이나 좌표(초)평면으로 대칭변환하여, 최소 1 개를 제외한 나머지 성분들이 0 (제로)가 되도록 변환할 수 있다. 그런데 위에서 벡터 y 의 종점을, 양의 좌표축 위에만 아니라, 음의 좌표축 위에도 선택할 수 있는데, 컴퓨터 계산 중 뺄셈에 의한 오차를 줄이기 위해서는, x 의 종점에서 먼 방향의 좌표축 위에 위치하도록 y 를 선택하는 것이 좋다.

[예제4.6] 벡터 $\mathrm{x} = [4, 1, -2, 2]^{T}$ 를 길이가 같고, 3번과 4번째 성분이 0 이 되는 벡터로 변환하는 Householder행렬을 찾아라.

(풀이) **벡터** $\mathbf{x}$**와 길이가 같고,** 3**번째와** 4**번째 성분이** 0**이 되는 벡터** $\mathbf{y}$**를** $\mathbf{y}=[4,a,0,0]^T$**라 하면,**

$$\|\mathbf{x}\|=\|\mathbf{y}\| \Longrightarrow \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{4^2+a^2}$$

$$\Longrightarrow a=\pm\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}$$

$$=\pm 3$$

$\mathbf{y}$**의** 2**번째 성분** a**의 부호를** $\mathbf{x}$**의** 2**번째 성분** 1**의 부호와 반대 쪽을 택하면** $a=-3$ **이 된다. 그러므로**

$$(\mathbf{x}-\mathbf{y})=[4,1,-2,2]^T-[4,-3,0,0]^T$$

$$=[0,4,-2,2]^T$$

$$\Longrightarrow \quad \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\sqrt{24}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{24}}[0,4,-2,2]^T$$

그러므로 Householder 행렬은

$$H = (I - 2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

이다. ■

[숙제] 예제4.6에서 첫 번 성분만 제외하고 모두 0 (제로)가 되는 벡터, 즉 $\mathrm{y} = [\mathrm{a}, 0, 0, 0]$ 로 변환하는 Householder 행렬을 구하라.

제2고유치 구하기(수축방법)

행렬 A 의 고유치 λ 에 대응하는 고유벡터 $\mathrm{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ 를 크기가 같고, 첫 번 성분을 제외한 나머지 모든 성분이 모두 0 (제로)가 되고, 첫 성분이 v_1 와 반대 부호를 갖는 벡터로 변환하는 Householder 행렬을 H 라고 하자.

즉

$$Hv = a e_1 \quad (a = -sign(v_1)\|v\|) \quad \text{--(1)}$$

이다. 고유 방정식 $Av = \lambda v$ 의 양변에 행렬 H 를 곱하여

$$\begin{aligned} HAv &= H\lambda v \\ &= \lambda Hv \quad \text{by 선형성} \\ &= \lambda a e_1 \quad \text{by (1)} \\ &= a\lambda e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a\lambda e_1 &= HAv \\ &= HA(HH)v \quad \text{by } HH = I \\ &= HAH(Hv) \quad \text{by 결합법칙} \\ &= HAH(a e_1) \quad \text{by (1)} \\ &= a HAH(e_1) \quad \text{by 선형성} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad (HAH) e_1 = \lambda e_1 \quad \text{by } a \neq 0$$

(HAH 의 고유(치,벡터)가 λ, e_1 이 됨)

$$\Rightarrow \quad (HAH)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 위 우변은 행렬 HAH의 첫 열벡터이다. 따라서

$$HAH = \begin{bmatrix} \lambda & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

행렬 HAH는 A와 유사행렬이므로 HAH의 고유치들은 A의 고유치들과 같고, 행렬 B는 λ를 제외한 A의 모든 고유치들을 갖고 있다. (정리4.7참조) 행렬 B를 A의 수축행렬이라고 한다. 수축행렬 B에 거듭제곱법을 행하면 A의 제2의 고유치를 구할 수 있다. ■

제2고유벡터 구하기

수축행렬 B에 거듭제곱법을 행하여 얻은 고유치 λ_1 과 고유벡터 w로부터 행렬 HAH의 고유벡터 x 를 거쳐, 행렬 A의 고유벡터 v_1 를 구해보자.

우선 고유치 λ_1 에 대응하는 행렬 HAH의 고유벡터를 x 라고 하자. 즉

$$(HAH)\mathrm{x} = \lambda_1 \mathrm{x}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{--(1)}$$

위 식의 2행부터 n행까지 방정식을 모으면 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

여기에서, B **의 고유치** λ_1 **에 대응하는 고유벡터가** $\mathrm{w} = [x_2, x_3, \cdots, x_n]^T$ **임을 알 수 있다. 즉** HAH **행렬의 고유벡터의 성분** $x_2, x_3, \cdots, x_n$ **은** B **에 거듭제곱법을 실시하여 얻는 고유벡터** w **로부터 얻을 수 있다. 나머지 성분** x_1 **을 구하자면, 식 (1)에서** 1 **행만 모으면**

$$\lambda x_1 + \mathbf{r}^T \mathrm{w} = \lambda_1 x_1$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\mathbf{r}^T \mathrm{w}}{\lambda_1 - \lambda} \text{ , } \mathbf{r} = [r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}]^T$$

이렇게 구해진 HAH **의 고유벡터** x **를 이용하여, 이제 행렬** A **의 고유벡터** v_1 **을 구해보자.**

$$(HAH)\mathrm{x} = \lambda_1 \mathrm{x}$$

$$\Longrightarrow \quad H(HAH\mathrm{x}) = H(\lambda_1 \mathrm{x}) \quad \textbf{by 양변에 } H \textbf{ 곱하기}$$

$$\Longrightarrow \quad AH\mathrm{x} = \lambda_1 H\mathrm{x} \quad \textbf{by } HH = I \textbf{ 와 선형성}$$

$$\Rightarrow \quad A(H\mathrm{x}) = \lambda_1 (H\mathrm{x}) \quad \text{by 결합법칙}$$

$$\Rightarrow \quad A\mathrm{v}_1 = \lambda_1 \mathrm{v}_1 \quad \text{with } \mathrm{v}_1 = \mathrm{H}\,\mathrm{x}$$

그러므로 행렬 A 의 고유벡터 v_1 는 $\mathrm{v}_1 = \mathrm{H}\,\mathrm{x}$ 로 계산할 수 있다. ■

[예제4.7] 행렬 A 가 고유치 $\lambda = 4$ 와 고유벡터 $\mathrm{v} = [1, -2, 2]^T$ 을 갖고 있을 때 수축방법을 이용하여 제2의 고유치 λ_1 과 대응하는 고유벡터 v_1 를 구하여라. (컴퓨터 사용)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[숙제] p161 #9 (컴퓨터 사용)