수치해석

김상배 교수

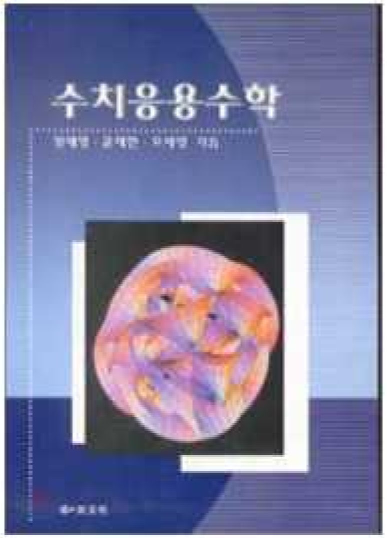
xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지

카톡(공부내용 질문)



교과서: 수치응용수학, 정세영외2인, 경문사

수치해석 : 해석학적으로 얻기 어려운 문제의 답을 수치적으로 근사값을 구하려는 연구.

예)

Input interpretation:

series	e^x	point	$x = 0$

Series expansion at x=0:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

(converges everywhere)

Taylor 급수

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 무한번 미분가능일 때 무한급수

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ \cdots$$

을 $x=a$ 에서 f 의 Taylor급수라 한다.
특히 $a=0$ 일 때 f 의 Taylor급수를 특히 Maclaurin급수라 한다.

Taylor의 정리

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 을 포함하는 구간에서 $(n+1)$ 번 미분가능하면,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\ \cdots\ +\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

이고 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ 가 되는 점 ξ 가 a 와 x 사이에 존재한다.

함수들의 멱급수 전개

Maclaurin 급수	수렴구간
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$	$-1 < x \le 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$	$-1 < x < 1$
$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$

한남대학교 수학과 김상배교수

[예제] e **의 값을 소수점이하 넷째자리까지 정확히 구하여라.**

(풀이)

모든 x **에 대하여**

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < c < x)$$

이므로 $x = 1$ **이면** $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ **이다.**

$c < 1$**이므로** $|R_n| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!}$ **이다.**

여기서 $e < 3$ **이므로** $|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}$ **이다.**

소수점이하 4째자리까지 정확하려면

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!} < 0.5 \times 10^{-4} = 0.00005$$ **이어야 하고**

$n = 8$ **이면 위 식을 만족하므로**

$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.7183$ **이다.** ■

[예제] $\sin 3°$ **의 값을 소수점이하 다섯째 자리까지 정확히 구하여라.**

(풀이)

$f(x)=\sin x$ **로 놓으면** $f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\ \cdots$ **이다.**

$$f(3°)=f\left(\frac{\pi}{60}\right)=\frac{\pi}{60}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^7+\ \cdots\ +R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)$$

그런데 $|f^{(n+1)}(c)|\le 1$ **이므로**

$$\left|R_n\left(\frac{\pi}{60}\right)\right|=\frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}\le\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}$$

소수점이하 다섯째 자리까지 정확하려면

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}<0.5\times 10^{-5}$$ **이어야 하고**

$n=3$ **이면 위 식을 만족하므로**

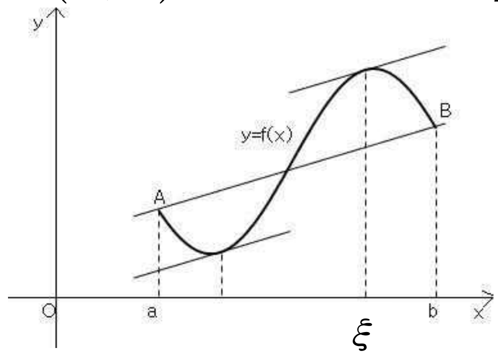
$$\sin 3°=\sin\frac{\pi}{60}\approx\frac{\pi}{60}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{60}\right)^3\approx 0.05234$$ **이다.** ■

평균값정리

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, 도함수 $f'(x)$가 개구간 (a,b)에서 존재하면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

을 만족하는 $\xi\in(a,b)$가 존재한다.



$$f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(b-a)^2$$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(b-a)^3$$

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(b-a)^2$$

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(b-a)^3$$

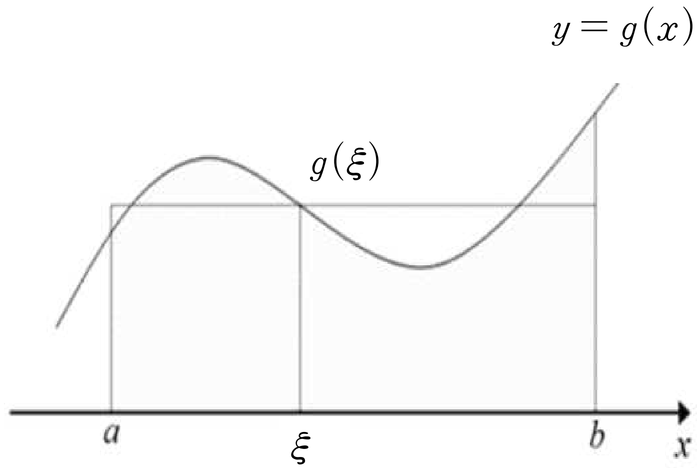
테일러의 정리

함수 $f(x)$ **가** $x=a$ **을 포함하는 구간에서** $(n+1)$ **번 미분가능하면,**

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \;\cdots\; + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

이고 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ **가 되는 점** ξ **가** a **와** x **사이에 존재한다.**

적분에 대한 평균값의 정리



(미분에 대한) 평균값 정리와 (어떤 의미에서) 같다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

로부터

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

$g(x)=f'(x)$ **라고 하면**

왼쪽식 : $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b g(x)dx$

오른쪽식 : $f'(\xi)(b-a)=g(\xi)(b-a)$

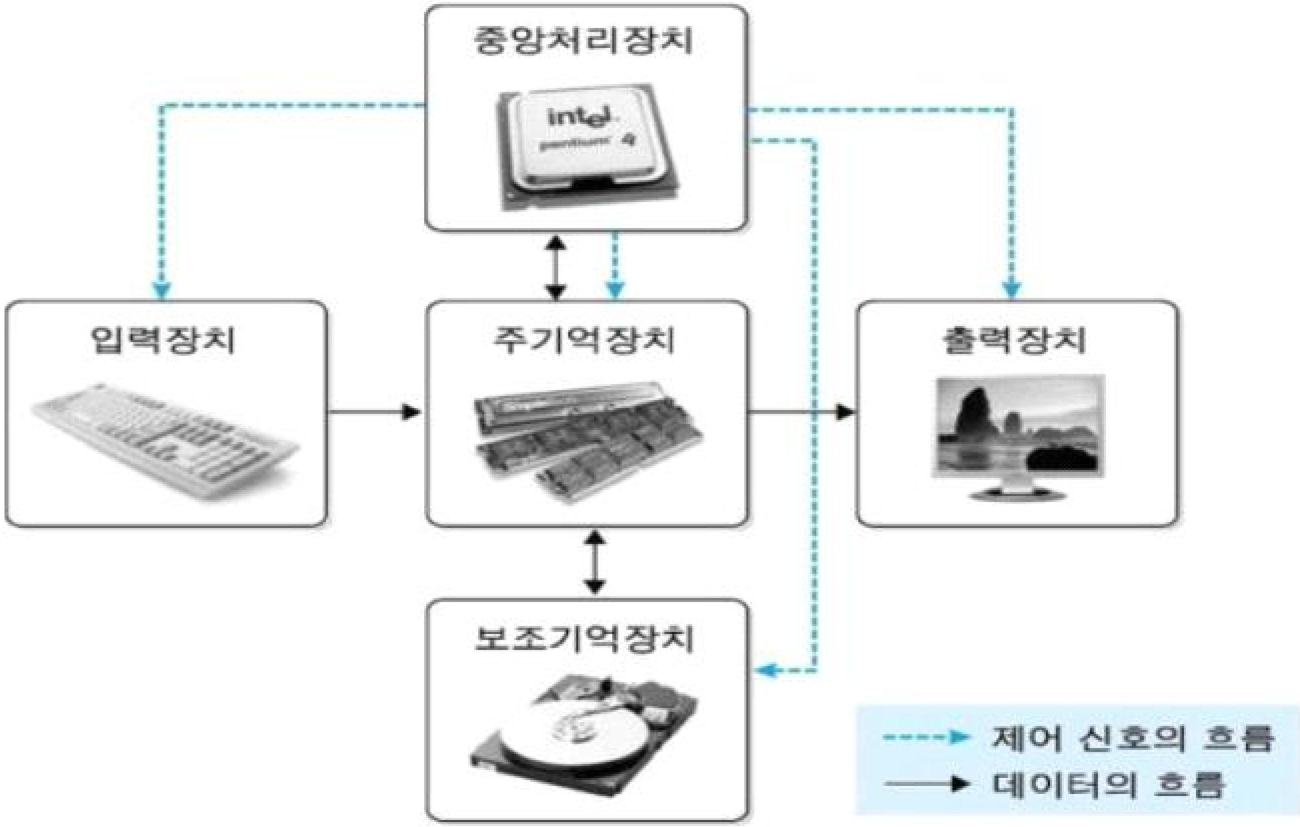
그러므로

$$\int_a^b g(x)dx=g(\xi)(b-a)$$ **여기서** $\xi\in(a,b)$

이것이 적분에 대한 평균값 정리이다.

컴퓨터의 구성 : 입력장치 + <u>중앙처리장치</u> + 출력장치

(제어장치+연산장치) + 기억장치(주기억+보조기억)



기억장치에 데이터를 저장하는 방법

데이터가 0 과 1 로만 구성됨. 0 과 1 로 숫자, 문자, 그림, 음악 등을 표시한다.

1 bit = 0 또는 1

1 byte = 8 bit = $2^8 = 256$ **개의 문자를 나타낼 수 있다. ASCII코드**

Dec	Hx	Oct	Char		Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Char
0	0	000	NUL	(null)	32	20	040	Space	64	40	100	@	96	60	140	`
1	1	001	SOH	(start of heading)	33	21	041	!	65	41	101	A	97	61	141	a
2	2	002	STX	(start of text)	34	22	042	"	66	42	102	B	98	62	142	b
3	3	003	ETX	(end of text)	35	23	043	#	67	43	103	C	99	63	143	c
4	4	004	EOT	(end of transmission)	36	24	044	$	68	44	104	D	100	64	144	d
5	5	005	ENQ	(enquiry)	37	25	045	%	69	45	105	E	101	65	145	e
6	6	006	ACK	(acknowledge)	38	26	046	&	70	46	106	F	102	66	146	f
7	7	007	BEL	(bell)	39	27	047	'	71	47	107	G	103	67	147	g
8	8	010	BS	(backspace)	40	28	050	(	72	48	110	H	104	68	150	h
9	9	011	TAB	(horizontal tab)	41	29	051	)	73	49	111	I	105	69	151	i
10	A	012	LF	(NL line feed, new line)	42	2A	052	*	74	4A	112	J	106	6A	152	j
11	B	013	VT	(vertical tab)	43	2B	053	+	75	4B	113	K	107	6B	153	k
12	C	014	FF	(NP form feed, new page)	44	2C	054	,	76	4C	114	L	108	6C	154	l
13	D	015	CR	(carriage return)	45	2D	055	-	77	4D	115	M	109	6D	155	m
14	E	016	SO	(shift out)	46	2E	056	.	78	4E	116	N	110	6E	156	n
15	F	017	SI	(shift in)	47	2F	057	/	79	4F	117	O	111	6F	157	o
16	10	020	DLE	(data link escape)	48	30	060	0	80	50	120	P	112	70	160	p
17	11	021	DC1	(device control 1)	49	31	061	1	81	51	121	Q	113	71	161	q
18	12	022	DC2	(device control 2)	50	32	062	2	82	52	122	R	114	72	162	r
19	13	023	DC3	(device control 3)	51	33	063	3	83	53	123	S	115	73	163	s
20	14	024	DC4	(device control 4)	52	34	064	4	84	54	124	T	116	74	164	t
21	15	025	NAK	(negative acknowledge)	53	35	065	5	85	55	125	U	117	75	165	u
22	16	026	SYN	(synchronous idle)	54	36	066	6	86	56	126	V	118	76	166	v
23	17	027	ETB	(end of trans. block)	55	37	067	7	87	57	127	W	119	77	167	w
24	18	030	CAN	(cancel)	56	38	070	8	88	58	130	X	120	78	170	x
25	19	031	EM	(end of medium)	57	39	071	9	89	59	131	Y	121	79	171	y
26	1A	032	SUB	(substitute)	58	3A	072	:	90	5A	132	Z	122	7A	172	z
27	1B	033	ESC	(escape)	59	3B	073	;	91	5B	133	[	123	7B	173	{
28	1C	034	FS	(file separator)	60	3C	074	<	92	5C	134	\	124	7C	174	|
29	1D	035	GS	(group separator)	61	3D	075	=	93	5D	135	]	125	7D	175	}
30	1E	036	RS	(record separator)	62	3E	076	>	94	5E	136	^	126	7E	176	~
31	1F	037	US	(unit separator)	63	3F	077	?	95	5F	137	_	127	7F	177	DEL

128	Ç	161	í	193	┴	225	ß
129	ü	162	ó	194	┬	226	Γ
130	é	163	ú	195	├	227	π
131	â	164	ñ	196	─	228	Σ
132	ä	165	Ñ	197	┼	229	σ
133	à	166	ª	198	╞	230	µ
134	å	167	º	199	╟	231	τ
135	ç	168	¿	200	╚	232	Φ
136	ê	169	⌐	201	╔	233	Θ
137	ë	170	¬	202	╩	234	Ω
138	è	171	½	203	╦	235	δ
139	ï	172	¼	204	╠	236	∞
140	î	173	¡	205	═	237	φ
141	ì	174	«	206	╬	238	ε
142	Ä	175	»	207	╧	239	∩
143	Å	176	░	208	╨	240	≡
144	É	177	▒	209	╤	241	±
145	æ	178	▓	210	╥	242	≥
146	Æ	179	│	211	╙	243	≤
147	ô	180	┤	212	╘	244	⌠
148	ö	181	╡	213	╒	245	⌡
149	ò	182	╢	214	╓	246	÷
150	û	183	╖	215	╫	247	≈
151	ù	184	╕	216	╪	248	°
152		185	╣	217	┘	249	∙
153	Ö	186	║	218	┌	250	·
154	Ü	187	╗	219	█	251	√
156	£	188	╝	220	▄	252	ⁿ
157	¥	189	╜	221	▌	253	²
158		190	╛	222	▐	254	■
159	ƒ	191	┐	223	▀	255	
160	á	192	└	224	α		

0과 1로 숫자를 나타내는 방법

정수(1배정도) : 4 byte = 32bit = $2\times2\times\cdots\times2=2\times2^{31}=2\times2{,}147{,}483{,}648$

$2{,}147{,}483{,}648$**(약21억)개의 음수와, 0, 그리고** $2{,}147{,}483{,}647$**(약21억)개의 양수를 사용할 수 있다.**

실수(1배정도) : 4 byte = 32bit = 부호1bit + 지수7bit + 가수24bit

아보가드로수 : 산소16g에 들어 있는 산소원자수 = $+6.022\times10^{23}$

7bit의 크기 : $2^7=128=(-64)\rightarrow0\rightarrow(+63)$

24bit의 크기 : 10진수 7자리

$$2^{24}=(2^{10})^{2.4}=1024^{2.4}\approx(10^3)^{2.4}=10^{(3\times2.4)}=10^{7.2}$$

정수(2배정도) : 8 byte=64bit=$2\times2^{63}=2\times9.2\times10^{18}$ **= 약 –100경에서 +100경**

실수(2배정도) : 8 byte=64bit=부호1bit + 지수15bit +가수48bit

15bit = $2^{15}=(-16{,}384)\rightarrow(+16{,}383)$

48bit = $2^{48}\approx1.4\times10^{14}$ **= 10진수 14자리**

실수의 과학적표기법

$$x = \pm (0.a_1 a_2 \cdots a_r)_b \times b^c$$

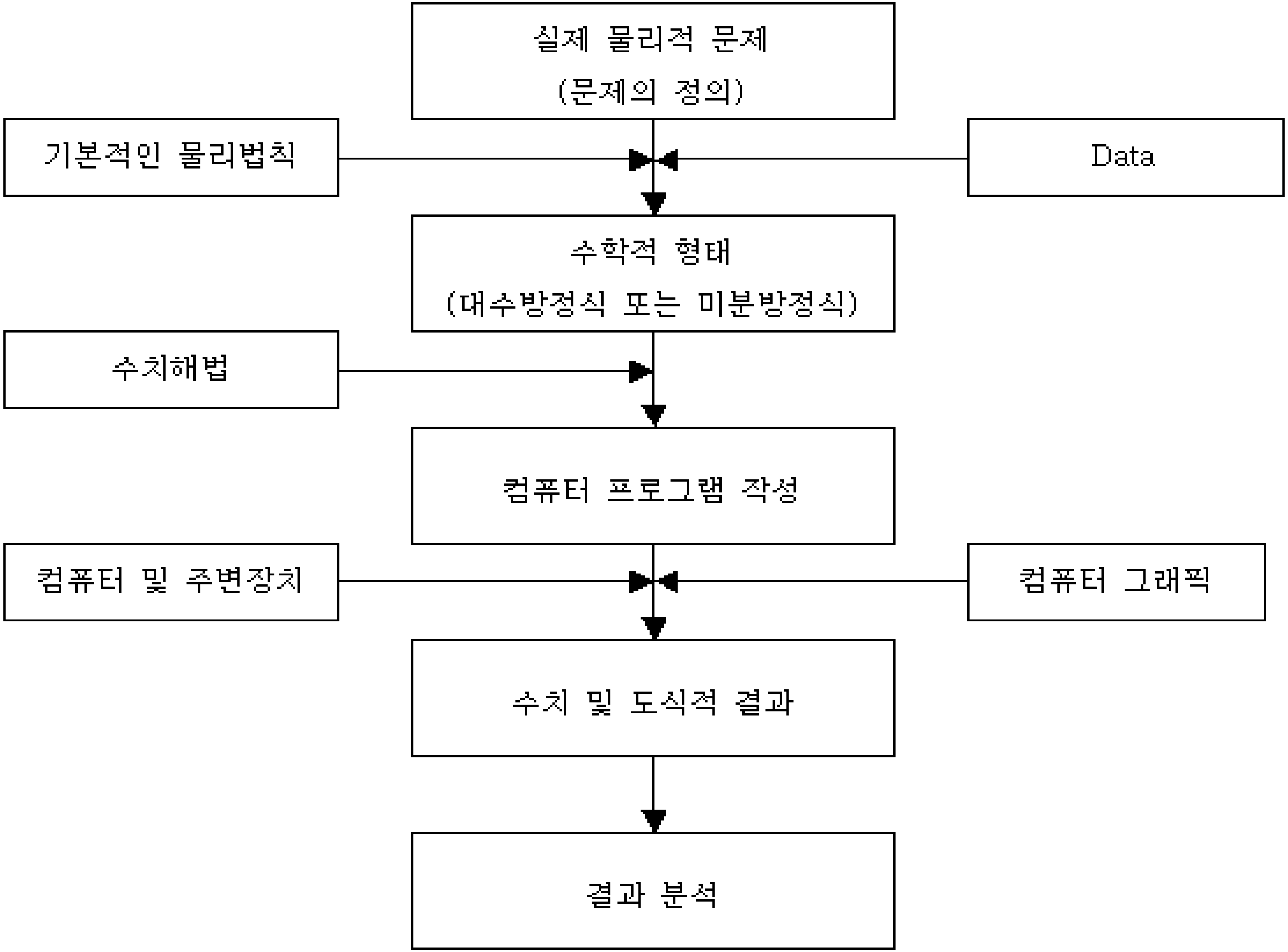
$$a_1 \neq 0,\ 0 \leq a_i < b, m \leq c \leq M$$

$(0.a_1 a_2 \cdots a_r)_b$ **: b진법의 가수(mantissa) ,**

c **:지수(exponent),** b **:기저(base)**

[문제] 가수가 3자리이고 $-2 \leq c \leq 2$ **(**c**는 정수),** $b = 5$ **인 경우 컴퓨터가 과학적표기법으로 나타낼 수 있는 실수의 개수는 몇 개인가?**

[숙제] 1배정도로 나타낼 수 있는 실수의 개수는 몇 개인가?


실제 물리적 문제
(문제의 정의)
기본적인 물리법칙
Data
수학적 형태
(대수방정식 또는 미분방정식)
수치해법
컴퓨터 프로그램 작성
컴퓨터 및 주변장치
컴퓨터 그래픽
수치 및 도식적 결과
결과 분석

오차의 종류

1. 원시오차 : 프로그램으로 수정할 수 없는 근본적인 오차.
   1) 초기오차 : 자연현상의 수학적 모델화 과정에서의 오차
      무리수를 유한소수로 표현할 때의 오차
   2) 전환오차(최초입력) : 10진수를 2진수로 저장할 때 오차

2. 처리오차 : 프로그램으로 수정할 수 있는 오차
   1) 절단오차 : 무한합을 유한합으로 계산할 때 오차
   2) 저장오차(중간입력) : 기억장치에 저장하기 위하여 반올림 할 때 오차

[예제] 전환오차의 예

$$(0.1)_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)_{10} = \left(\frac{1}{1010}\right)_{2} \overset{*}{=} (0.00011001100\cdots)_2$$

따라서 $1/10$ 을 유한한 가수를 사용하는 컴퓨터에서 전환오차가 생긴다.

[숙제] 등식 $*$ 을 증명해 보아라.

절대오차

참값 x에 대하여 근사값을 $\tilde{x}$라고 할 때, $|x-\tilde{x}|$를 절대오차라고 한다.

상대오차

참값 x에 대하여 근사값을 $\tilde{x}$라고 할 때, $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$를 상대오차라고 한다.

유효숫자 n자리

참값x와 근사값 $\tilde{x}$에 대하여, 만약 상대오차가

$$\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-n+1}$$

이면, 근사값 $\tilde{x}$는 "유효숫자 n자리가 일치한다" 또는

"n자리의 유효숫자를 갖는다" 라고 한다.

주의 : n자리수가 정확하게 일치하는 것이 아니고, 비슷하게 일치함.

[예제] **(1)** $x = 1000, \tilde{x} = 1000.4$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(2) $x = 1000, \tilde{x} = 999.6$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(3) $x = 4000, \tilde{x} = 4001.6$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

(4) $x = 4000, \tilde{x} = 3998.4$**이면** $\dfrac{|x-\tilde{x}|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-4+1}$**이므로**

근사값 $\tilde{x}$ **는 n=4자리 유효숫자를 갖는다. 즉 근사값의 4자리가 참값과 비슷하게 일치한다고 볼 수있다.**

덧셈과 뺄셈

유효숫자가 작은 숫자에 맞추어 계산한다. 예를 들어, 유효숫자 세 개인 수 3.14와 유효숫자 5개인 8.9714를 더하면 산술적으로는 12.1114가 나오지만, 유효숫자가 소수점 이하 두 개 이므로 결과는 12.11이 된다.

곱셈과 나눗셈

두 측정치 중 유효숫자가 적은 쪽과 같은 유효숫자를 가진다. 예를 들어, 2.56 × 12.8690의 산술적 계산결과는 32.94464이지만, 2.56의 유효숫자가 3개이므로 유효한 결과는 32.9이다.

유효숫자의 자리수 상실

상대적으로 큰수를 곱하거나 작은수로 나누면 overflow 된다.

비슷한 크기의 숫자를 빼면 유효숫자 자리수가 상실된다.

$0.24567 - 0.24512 = 0.00055$ (유효숫자 5자리 -> 2자리)

(해결법) 수학적으로 동치인 다른 식을 변형한다.

[예제] $$\sqrt{x^2+1}-1 = \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$= \frac{(x^2+1)-1^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$= \frac{x^2}{(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

수열의 비교 ($\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$)

$\alpha_n = O(\beta_n) \Leftrightarrow (\exists\, n_0 : n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| \le c|\beta_n|)$: **비슷한 속도로 0에 수렴**

$\alpha_n = o(\beta_n) \Leftrightarrow \alpha_n/\beta_n \to 0$: α_n**이** β_n**보다 빠르게 0에 수렴한다.**

[예제]

$$\frac{n+1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right),\ \frac{1}{n\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

수열의 수렴 $(x_n \to x)$

1차적 수렴 : $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|$

2차적 수렴 : $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|^2$

p**차적 수렴 :** $|x_{n+1} - x| \le c|x_n - x|^p$

[예제] $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ **은** 0**으로 1차적으로 수렴한다.**

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}} - 0\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2^n} - 0\right|$$

[숙제] $x_n = 5^{-2^n}$**은** 0**으로 몇 차적으로 수렴하는지 보여라.**

제2장 비선형방정식의 해

선형방정식

$$ax + b = 0$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = b$$

해가 기하학적으로 선형(직선, 평면, 초평면)으로 나타난다.

해가 없거나, 한 개 이거나, 무한 개로 나타난다.

비선형방정식

$$ax^2 + b = 0 \qquad \sqrt{x} + b = 0 \qquad \sin x + x^2 = 0 \qquad f(x) = 0$$

해가 없거나, 유한 개이거나, 무한 개로 나타난다.

5차이상 다항식은 근의 공식 (근과 계수의 관계식)이 없다.

비선형방정식은 일반적으로는 유한 회수로 구할 수 없고,

반복법을 사용하여 근사값의 수열이 참값으로 수렴하도록 한다.

이분법 (p21)

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a), f(b)$가 부호가 다를 경우 방정식 $f(x)=0$의 해를 찾는 방법

입력 : $a, b, xtol, ftol, N$

For $i = 1$ **to** N

$$e = \frac{b-a}{2}$$

$$m = \frac{b+a}{2}$$

if $e \le xtol$ **or** $|f(m)| \le ftol$ **then stop**

if $f(a)f(m) < 0$ **then**

$b = m$

else

$a = m$

endif

[예제2.2] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ **의 근이 구간** $[-7, -5]$ **에 적어도 하나가 존재함을 보이고 이분법을 사용하여 근사값을 구하라.**

(풀이)

[중간값의 정리] 함수 $f(x)$ **가 구간** $[a,b]$ **에서 연속이고**
$m = \min\{f(x) \mid a \le x \le b\},\ M = \max\{(f(x) \mid a \le x \le b\}$
이면 $\forall y \in [m, M],\ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$ **이 성립한다.**

함수 $f(x) = e^x - 1.4 - \tan^{-1}x$ **는** $[-7, -5]$ **에서 연속이다.**

$f(-7) \approx 0.298$, $f(-5) = -0.0198$ **이므로** $f(-5) \le 0 \le f(-7)$

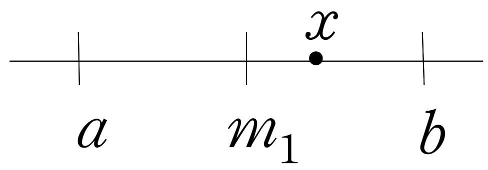
이다. 중간값의 정리에 의하여 $\exists x \in [-7, -5] : f(x) = 0$ **이다.**

이분법에서 조건을 $N = 50,\ xtol = 1.0E-5$ **로 놓고 실행하면** $i = 18$ **근방에서 근사값** $m = -5.682$ **을 구할 수 있다.** ■

[숙제] 이분법을 사용하여 방정식 $e^x - \sin x = 0,\ x \in [-4, -2]$ **를 해를 구하라.**

[예제2.3] 방정식 $x^3 - x - 2 = 0$의 근은 구간 $[1,2]$에 존재함을 보이고, 절대오차가 10^{-3}보다 작아지도록 $xtol$과 N을 구하여라.

(풀이)



$f(x) = x^3 - x - 2$ **는 구간 $[1,2]$에서 연속이고,**

$$f(1) = -2 < 0 < 4 = f(2)$$

이므로 중간값의 정리에 의하여 구간 $[1,2]$에서 방정식 $f(x) = 0$의 근이 존재한다. $|x - m_1| < \dfrac{b-a}{2}$ **이고**

$$|x - m_2| < \frac{b-a}{2^2},\ \cdots\ , |x - m_i| < \frac{b-a}{2^i}$$ **이므로**

$|x - m_N| < \dfrac{b-a}{2^N} \le xtol = 10^{-3}$ **이 되게 하려면** $\dfrac{2-1}{2^N} \le 10^{-3}$ **이 되고 양변에 $\log$를 취하면** $\log_{10}(2^{-N}) \le \log_{10}(10^{-3})$ **이 되고**

$N \ge \dfrac{3}{\log_{10} 2} \approx 9.96$ **그러므로 $N = 10$이상이면 충분하다.** ■

[예제2.4] **방정식** $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ **의 근을 구간** $[-7, -5]$ **에서 이분법으로 구할 때 상대오차가** 10^{-5} **보다 작게 되려면 최소한 몇 번을 반복해야 하는가?**

(풀이) **상대 오차 =** $\dfrac{|x - m_i|}{|x|} \le \dfrac{b-a}{|x|\,2^i} < 10^{-5}$ **이어야 한다.**

$b - a = (-5) - (-7) = 2$ **이고** $x \in [-7, -5]$**이므로** $\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{1}{5}$.

따라서 $\dfrac{2}{5 \times 2^i} < 10^{-5}$ **이 되고,** $2^{-i+2} < 10^{-4}$ **이 된다. 양변에 로그를 취하여 풀면** $i > 2 + \dfrac{4}{\log 2} \approx 15.28$ **이므로 최소** 16 **번 반복해야 한다.** ■

[숙제] **이분법을 이용하여 절대오차가** 10^{-3} **보다 작은** $\sqrt{2}$ **의 근사값을 구하여라.**

가위치법 (p26)

함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 다를 경우,

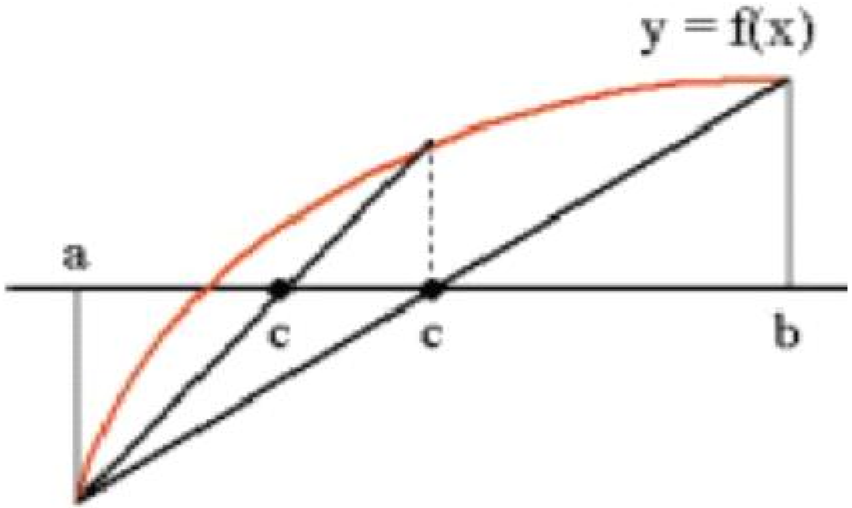
$f(x)=0$의 해를 구하는 방법으로,

두 점 $(a, f(x))$와 $(b, f(b))$을 잇는 직선의 방정식은

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$$0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a)$$

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$



가위치법 알고리즘

입력 : $a, b, xtol, ftol, N$

For $n = 1$ **to** N

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$e = |c - c_0|$$

if $e \le xtol$ **or** $|f(c)| \le ftol$ **then stop**

if $f(a)f(c) < 0$ **then**

$$b = c$$

else

$$a = c$$

endif

$$c_0 = c$$

[예제2.5] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1} x = 0$ **의 근이 구간** $[-7, -5]$ **에 존재한다.**
가위치법을 사용하여 근사값을 구하라.

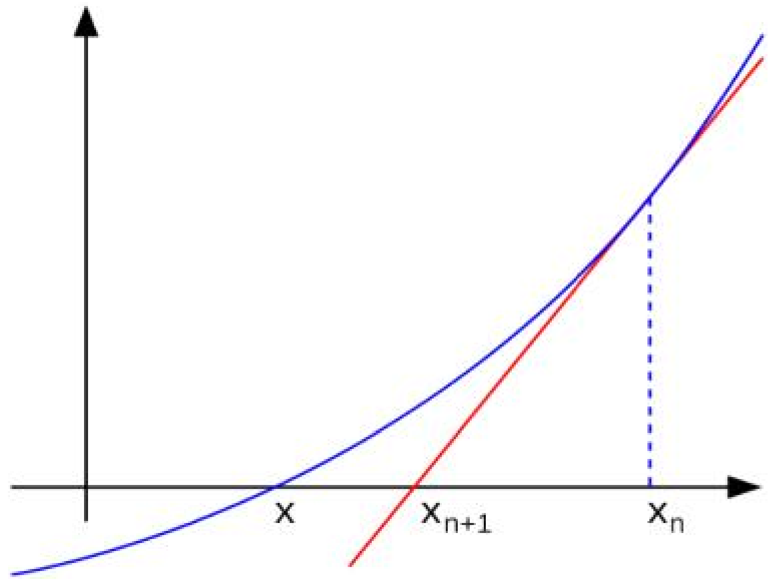
(풀이)

$N = 50,\ xtol = 10^{-7},\ ftol = 10^{-7}$ **을 사용하여 가위치법의 알고리즘을 사용하여 구하면 대강** 8 **번 근방에서 근사값** $c = -5.6823$ **을 구할 수 있다. 이분법보다 수렴속도가 빠른 것을 알 수 있다.** ■

[숙제] 방정식 $e^x - \sin x = 0,\ x \in [-4, -2]$ **의 해를 가위치법으로 구하는 컴퓨터 프로그램을 하여 제출하라.**

Newton 방법

뉴톤법은 방정식 $f(x)=0$ 에서의 함수 f 가 미분가능할 때, 사용할 수 있는 수렴이 빠른 방정식이 수치해법이다. 초기 추측 x_0 에서 시작하여 n 단계의 해의 근사값 x_n 이 주어졌을 때, $(n+1)$ 단계의 근사값 x_{n+1} 은 x_n 에서의 접선이 x 축과 만나는 지점이다.



x_n 에서의 접선의 방정식

$$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$$

이 점 $(x_{n+1},0)$ 을 만족하므로

$$0=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n)$$

이 성립하고 x_{n+1} 을 구하면,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

뉴톤법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, ftol, N$

For $n = 0$ **to** N

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

if $|x_{n+1} - x_n| \le xtol$ **or** $|f(x_{n+1})| \le ftol$ **then stop**

[참고] 수렴차수 구하기

$$\begin{cases} e_1 = C\, e_0^p & \Leftarrow \ |x - x_1| = C\,|x - x_0|^p \\ e_2 = C\, e_1^p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{e_2}{e_1} = \left(\frac{e_1}{e_0}\right)^p \Rightarrow p = \frac{\log(e_2/e_1)}{\log(e_1/e_0)}$$

[예제2.6] 뉴톤법으로 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 구하여라.

(풀이) $f(x) = x^2 - 2$ **일 때** $\sqrt{2}$ **는 방정식** $f(x) = 0$ **의 근이다.**

$f'(x) = 2x$ **이므로 뉴톤의 반복식은**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

[예제2.7] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1} x = 0$ **의 근을 뉴톤법으로 구하여라.**

초기추측 $x_0 = -7$ **를 사용하여라.**

(풀이) 수렴차수가 2가 나온다.

[정리2.1] f'' **이 구간** $[a,b]$ **에서 연속이고** $f(x)=0$ **의 근** s **가 단일근일 때,**
즉 $f(s)=0\neq f'(s)$ **이라면, 근의 적당히 작은 근방에서 뉴톤법의 수렴차수는 2이다.**

(증명) 테일러 정리로부터 s **와** x_n **사이에 있는** ζ_n **에 대하여,**

$$f(s)=f(x_n)+f'(x_n)(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

이 성립하므로, $f(s)=0$ **를 적용하면,**

$$0=f(x_n)+f'(x_n)(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s-x_n)^2$$

$$0=\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=(s-x_n)+\frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

뉴톤법 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ **을 대입하면,**

$$x_{n+1} - x_n = s - x_n + \frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

$$s - x_{n+1} = -\frac{f''(\zeta_n)}{2\,f'(x_n)}(s-x_n)^2$$

$$|s-x_{n+1}| \approx C\,|s-x_n|^2,\ \ with\ \ C = \left|\frac{f''(s)}{2\,f'(s)}\right|$$

그러므로 단일근 근처에서 뉴톤법의 수렴차수는 2이다. ■

[정리] $f^{(3)}$ **이 구간** $[a,b]$ **에서 연속이고** $f(x)=0$ **의 근** s **가 중근일 때,**

즉 $f(s) = f'(s) = 0 \neq f''(s)$ **이라면, 뉴톤법의 수렴차수는 1이다.**

(증명) 테일러정리로 부터 s **와** x_n **사이에 있는 어떤** ζ_n **에 대하여 다음이 성립한다.**

$$f(s) = f(x_n) + f'(x_n)(s - x_n) + \frac{f''(\zeta_n)}{2!}(s - x_n)^2$$

[정리2.1]처럼 뉴톤법을 이용하여

$$s - x_{n+1} = -\frac{f''(\zeta_n)}{2 f'(x_n)}(s - x_n)^2$$

$f'(s) = 0$ **을 이용하여**

$$s - x_{n+1} = \frac{f''(\zeta_n)}{2 \dfrac{f'(s) - f'(x_n)}{(s - x_n)}}(s - x_n)$$

평균값의 정리를 이용하여, s **와** x_n **사이에 있는 어떤** ξ_n **에 대하여,**

$$s - x_{n+1} = \frac{f''(\zeta_n)}{2 f''(\xi_n)}(s - x_n)$$

$$|s - x_{n+1}| \approx C|s - x_n|, \ with\, C = \left| \frac{f''(s)}{2 f''(s)} \right|$$

그러므로 중근 근처에서 뉴톤법의 수렴차수는 1이다. ■

[예제2.8] $f(x)=(x+1)(x-5)^2$ **의 2개의 근을 뉴톤법으로 구하고, 각 근으로 수렴하는 근사 수열의 수렴차수를 비교하여라.**

(풀이) 초기값으로 단일근 근처에서는 $x_0=0$ **으로 중근 근처에서는** $x_0=7$ **으로 시작하여 보자. (숙제)**

할선법

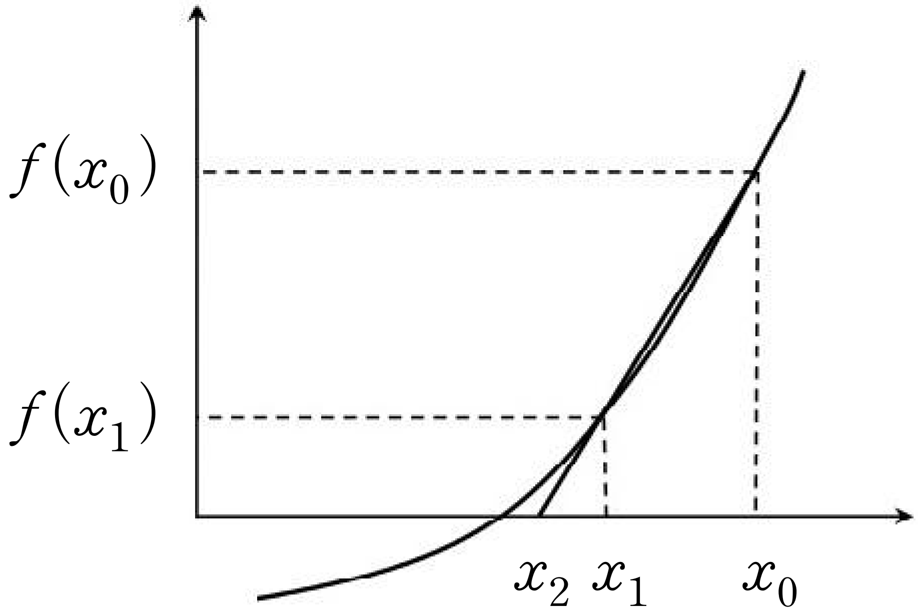
초기추측 x_0, x_1 **에 대하여,**

두 점 $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ **을 지나는 직선의 방정식**

$$y=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_1)+f(x_1)$$

이 점 $(x_2, 0)$ **을 만족하므로**

$$0=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_1)+f(x_1)$$



이 성립하고, x_2을 구하면,

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

이것을 일반화 하면

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad \blacksquare$$

참고로 할선법은 아래와 같이 뉴톤법의 근사식임을 알 수 있다.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

할선법 알고리즘

입력 : $x_0, x_1, xtol, ftol, N$ **For** $n = 1$ **to** N $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$ **if** $\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \le xtol$ **or** $\lvert f(x_{n+1}) \rvert \le ftol$ **then stop**

[정리2.2] f'' 이 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x)=0$ 의 근 s 가 단일근일 때, 즉 $f(s)=0\neq f'(s)$ 이라면, 근의 적당히 작은 근방에서 할선법의 수렴차수는 **1.62** 정도 된다.

(증명) $f_n=f(x_n)$ 로 표기하면 할선법은

$$x_{n+1}=x_n-f_n\frac{x_n-x_{n-1}}{f_n-f_{n-1}}$$

양변과 우변 분자에 근 s 를 빼거나 더하면,

$$(x_{n+1}-s)=(x_n-s)-f_n\frac{(x_n-s)-(x_{n-1}-s)}{f_n-f_{n-1}}$$

오차 $e_n=x_n-s$ 을 대입하면,

$$e_{n+1}=e_n-f_n\frac{e_n-e_{n-1}}{f_n-f_{n-1}}$$

$$e_{n+1} = e_n - f_n \frac{e_n - e_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{e_n f_n - e_n f_{n-1} - f_n e_n + f_n e_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{f_n e_{n-1} - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

여기서 테일러정리와 $f(s) = 0$ **를 이용하면,**

$$f_n = f(s) + e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n) = e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)$$

$$f_{n-1} = f(s) + e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1}) = e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})$$

이 되고 이것을 적용하면,

$$e_{n+1} = \frac{f_n e_{n-1} - e_n f_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}$$

$$= \frac{e_{n-1}\left(e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)\right) - e_n\left(e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})\right)}{\left(e_n f'(s) + \frac{e_n^2}{2!} f''(\zeta_n)\right) - \left(e_{n-1} f'(s) + \frac{e_{n-1}^2}{2!} f''(\zeta_{n-1})\right)}$$

여기에 $\zeta_n \approx s \approx \zeta_{n-1}$ **를 적용하고, 분모에만,** $e_n^2 \approx 0 \approx e_{n-1}^2$**을 적용하면,**

$$\approx \frac{1}{2} \frac{e_{n-1} e_n^2 f''(s) - e_n e_{n-1}^2 f''(s)}{e_n f'(s) - e_{n-1} f'(s)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} \frac{e_{n-1} e_n^2 - e_n e_{n-1}^2}{e_n - e_{n-1}} = \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} e_{n-1} e_n \frac{e_n - e_{n-1}}{e_n - e_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{f''(s)}{f'(s)} e_{n-1} e_n$$

그러므로 $e_{n+1} \approx C\, e_{n-1} e_n$ **(여기서** $C = \frac{1}{2}\frac{f''(s)}{f'(s)}$**) 를 얻었다.**

한편 수렴차수 p **는** $e_{n+1} = C_1 e_n^p$ **로 정의된다.**

한번 더 $e_n = C_1 e_{n-1}^p$ **을 적용하면,**

$$e_{n+1} = C_1 (C_1 e_{n-1}^p)^p$$

$$= C_1^{p+1} e_{n-1}^{p^2} \quad \text{---(1)}$$

이 된다. 여기에 $e_{n+1} \approx C\, e_{n-1} e_n$ **로부터**

$$e_{n+1} \approx C\, e_{n-1}(C_1 e_{n-1}^p)$$

$$= C C_1 e_{n-1}^{p+1} \quad \text{---(2)}$$

(1),(2)로부터 $p^2 = p+1$

$$p^2 - p - 1 = 0$$

2차방정식의 근의 공식에 따라

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 \ ■$$

[예제2.9] 방정식 $e^x - 1.4 - \tan^{-1}x = 0$ 의 근을 할선법으로 구하여라.

초기추측 $x_0 = -5,\ x_1 = -7$ 를 사용하여라.

(풀이) 할선법은 뉴톤법보다 약간 느리다. 수렴차수는 1.62 근방으로 나온다.

[숙제] $x^3 - x - 1 = 0$ 의 근을 할선법을 사용하여 구하고, 수렴차수도 구하여라.

초기추측은 $x_0 = 1,\ x_1 = 2$ 를 사용하여라.

고정점

실수 s 는 함수 g 의 고정점이다. $\Leftrightarrow$ $s = g(s)$

고정점반복법

방정식 $f(x) = 0$ 을 $x = g(x)$ 형태로 변형한 다음, 위와 같이 반복한다.

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, 2, \cdots$$

고정점반복법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, N$

for $n=0$ to N

$x_{n+1} = g(x_n)$

if $|x_{n+1} - x_n| \le xtol$ then stop

[예제2.10]

방정식 $x^2 - x - 3 = 0$의 근을 고정점 반복법으로 구하기 위하여 **반복함수** $g(x)$를 찾아 보아라.

(풀이)

(1) $x = x^2 - 3 \Rightarrow g(x) = x^2 - 3$

(2) $x = \dfrac{x+3}{x} \implies g(x) = \dfrac{x+3}{x}$

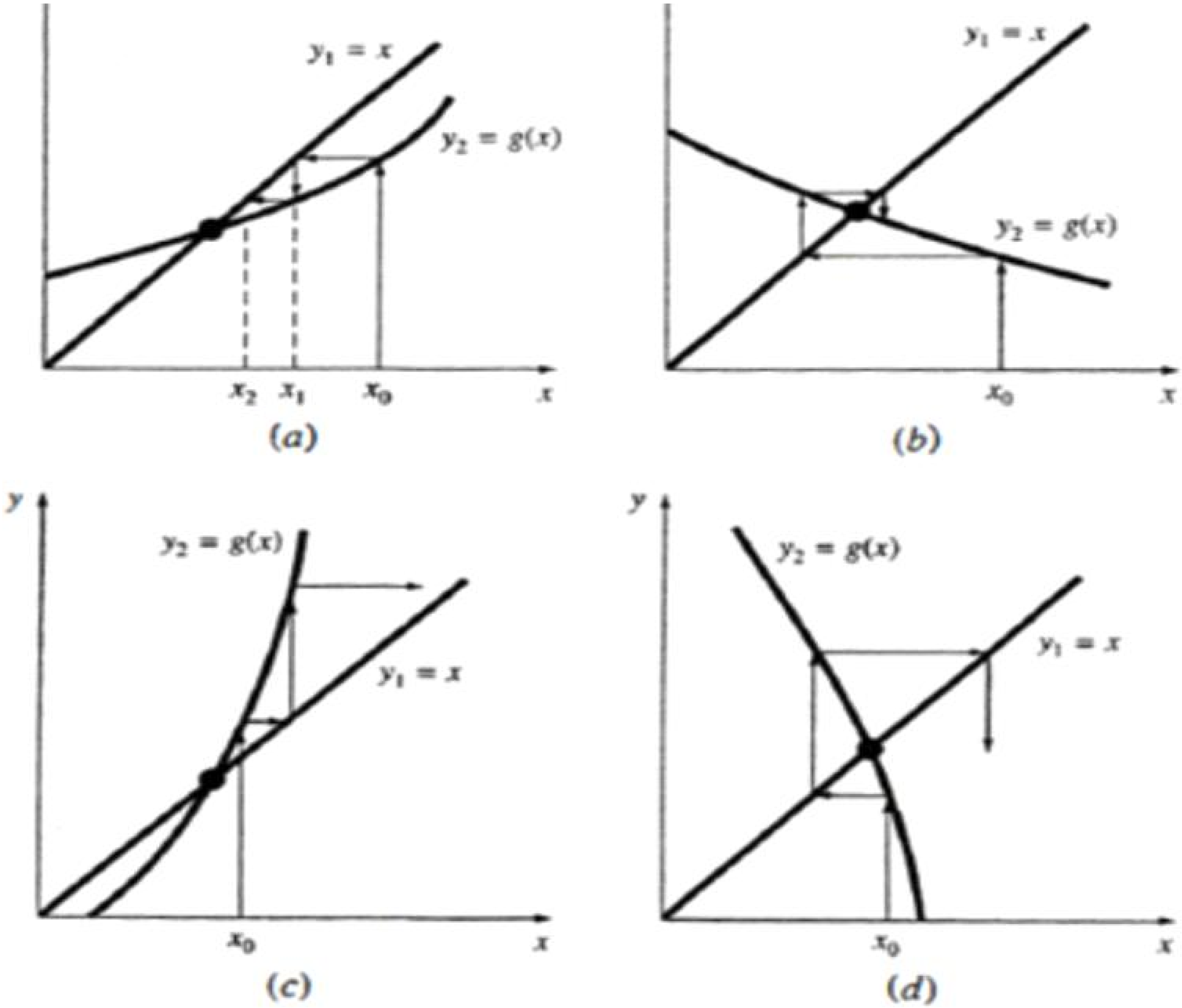
(3) $x = \sqrt{x+3} \implies g(x) = \sqrt{x+3}$

(4) $x = x + 2(x^2 - x - 3) \implies g(x) = x + 2(x^2 - x - 3)$

(5) $x = x - \dfrac{x^2 - x - 3}{2x - 1} \implies g(x) = x - \dfrac{x^2 - x - 3}{2x - 1}$

[예제2.11] **방정식** $x^2 - x - 3 = 0$ **의 근을 예제2.10의 반복함수들을 사용한 고정점 반복법으로 구하여 비교하여라.**

[숙제] p54 #6을 컴퓨터 프로그램을 실행하여 비교하여라.



$y_1 = x$
$y_2 = g(x)$
x_2 x_1 x_0 x
(a)
$y_1 = x$
$y_2 = g(x)$
x_0 x
(b)
y
$y_2 = g(x)$
$y_1 = x$
x_0 x
(c)
y
$y_2 = g(x)$
$y_1 = x$
x_0 x
(d)

[정리 2.3] (1) $\forall x \in I = [a, b],\ g(x) \in I$

(2) $\forall x \in I,\ |g'(x)| \le r < 1$

(3) 초기값 $x_0 \in I$, $\forall n \in \mathrm{N}$, $x_n = g(x_{n-1})$

$\Longrightarrow$ (1) 구간 I 안에 함수 g 의 고정점 s 가 존재.

(2) g 의 고정점은 유일하다.

(3) 수열 $\{x_n\}$ 은 고정점으로 수렴.

(4) $|x_n - s| \le \dfrac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0|$

(증명)

(1) 만약 $g(a) = a$ 또는 $g(b) = b$ 이면 고정점 존재.

$a < g(a)\ \wedge\ g(b) < b$ 인 경우, $g'(x)$ 가 존재하면 g 는 연속이므로,

$h(x) \equiv g(x) - x$ 도 연속이다. 또한 $h(a) = g(a) - a > 0$ 이고, 또한

$h(b) = g(b) - b < 0$ 이므로, 중간값의 정리에 의하여, $h(s) = 0$ 을 만족

하는 s **가** I **안에 존재한다. 그러므로** $g(s)-s=h(s)=0$ **, 즉** $g(s)=s$ **인** s **가 존재한다.**

(2) 서로 다른 두 개의 고정점 s **와** w **가 있다면, 평균값의 정리에 의하여,**

$$g(s)-g(w)=g'(c)(s-w)$$

인 c **가** s **와** w **사이에 존재한다. 따라서**

$$\begin{aligned}|s-w| &= |g(s)-g(w)| \\ &= |g'(c)|\,|s-w| \\ &\le r\,|s-w| \\ &< |s-w|\end{aligned}$$

그러므로 $|s-w|<|s-w|$ **로 모순이다. 따라서 고정점은 유일하다.**

(3) 평균값의 정리에 의하여, $\forall n\in\mathrm{N}$,

$$\begin{aligned}|x_n-s| &= |g(x_{n-1})-g(s)| \\ &= |g'(c_n)|\,|x_{n-1}-s|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le r\,|x_{n-1} - s| \\
&\le r^2 |x_{n-2} - s| \\
&\le r^n |x_{n-n} - s|
\end{aligned}
$$

그러므로

$$|x_n - s| \le r^n |x_0 - s|$$

여기에서 $r < 1$ **이므로 우변은** 0 **으로 수렴한다.**

따라서 x_n **은** s **로 수렴한다.**

(4) 삼각부등식에 의하여,

$$
\begin{aligned}
|s - x_0| &= |s - x_1 + x_1 - x_0| \\
&\le |s - x_1| + |x_1 - x_0| \\
&\le r|s - x_0| + |x_1 - x_0|
\end{aligned}
$$

$$(1 - r)|s - x_0| \le |x_1 - x_0|$$

$$|s - x_0| \le \frac{1}{1-r}|x_1 - x_0| \quad \textbf{---(\#)}$$

그런데 위 풀이 (3)으로부터,

$$|x_n - s| \le r^n |x_0 - s|$$

$$\le r^n \left(\frac{1}{1-r}|x_1 - x_0|\right) \text{ , } \textbf{by(\#)}$$

그러므로

$$|x_n - s| \le \frac{r^n}{1-r}|x_1 - x_0| \quad \blacksquare$$

[명제] 정리2.3의 가정에, $g^{(k)}$가 연속이고,

$$0 = g'(s) = \cdots = g^{(k-1)}(s)$$
$$0 \ne g^{(k)}(s)$$

의 조건을 더하면, 수열 $\{x_n\}$의 수렴차수는 k가 된다.

(증명)

오차를 $e_n = x_n - s$ **라 할 때,**

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - s \\ &= g(x_n) - g(s) \end{aligned}$$

여기에서 함수 $g^{(k)}$**가 연속이면, by 테일러 정리,** x_n**과** s**사이에** ζ_n**이 존재하여,**

$$= g'(s)\, e_n + \frac{g''(s)}{2!} e_n^2 + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(s)}{(k-1)!} e_n^{k-1} + \frac{g^{(k)}(\zeta_n)}{k!} e_n^k$$

$$= \frac{g^{(k)}(\zeta_n)}{k!} e_n^k \text{ , } \quad \textbf{by } 0 = g'(s) = \cdots = g^{(k-1)}(s)$$

따라서, $|e_{n+1}| \approx C\, |e_n|^k$ **여기서** $C = \left| \dfrac{g^{(k)}(s)}{k!} \right|$**.**

그러므로 수렴차수는 k**가 된다. ■**

Aitken의 $\varDelta^2$ 방법

고정점반복법을 가속하는 방법으로

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\varDelta x_n)^2}{\varDelta^2 x_n}$$

여기에서 $\varDelta x_n = x_{n+1} - x_n$

$$\begin{aligned} \varDelta^2 x_n &= \varDelta x_{n+1} - \varDelta x_n \\ &= (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

(풀이) 고정점 반복법의 근사값 수열 $\{x_n\}$ **이 고정점(참값)** s **으로 일차적으로 수렴한다고 하자. 그럼 어떤 상수** C**가 존재하여, 충분히 큰** n**에 대하여,**

$$\begin{cases} x_{n+1} - s \approx C(x_n - s) \\ x_{n+2} - s \approx C(x_{n+1} - s) \end{cases}$$

좌변끼리 나누고, 우변끼리 나누면

$$\frac{x_{n+1}-s}{x_{n+2}-s} \approx \frac{x_n - s}{x_{n+1}-s}$$

$$\Longrightarrow (x_{n+2}-s)(x_n - s) \approx (x_{n+1}-s)^2$$

$$\Longrightarrow x_{n+2}\,x_n - (x_{n+2}+x_n)s \ \approx\ x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}s$$

$$\Longrightarrow s \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx \frac{x_n(x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n)-(x_{n+1}^2-2x_{n+1}x_n+x_n^2)}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

$$\Longrightarrow s \approx x_n - \frac{(\varDelta x_n)^2}{\varDelta^2 x_n} \quad \blacksquare$$

Steffensen방법 알고리즘

입력 : $x_0, xtol, N$

for $n = 0$ to N

$y = g(x_n)$

$z = g(y)$

$x_{n+1} = x_n - (y - x_n)^2 / (z - 2y + x_n)$

if $|x_{n+1} - x_n| \le xtol$ then stop

[예제2.13] 함수 $f(x) = (x-7)(x-2\sin x)^2$ (책오타수정필요), 초기값과 종료조건을 $x_0 = 3$, $xtol = 10^{-10}$로 하고, 반복함수 $g(x) \equiv x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$에 Steffensen법을 적용하여 중근에 대한 근사값을 구하고, 뉴톤방법은 중근에 대하여 원래는 1차적을 수렴하는데, Steffensen법으로는 더 빠른 2차적으로 수렴한다.

[숙제] 방정식 $x - e^{-x} = 0$의 구간 $[0,1]$위 근의 근사값을 Steffensen 방법으로 구하라. 종료조건 $xtol = 10^{-4}$ 을 사용하라.

제3장 선형연립방정식의 해법

선형대수 요약

행렬, 상삼각행렬, 하삼각행렬, 항등행렬, 전치행렬, 대칭행렬, 교대행렬

역행렬, 정칙행렬, 특이행렬, 행렬식(determinant)

정방행렬의 열공간 = 열벡터들이 (일차결합들로)생성하는 공간

= 선형변환 $y = Ax$ 의 치역

$rank(A)$**= 열공간의 차원**

$Ker(A)$ **= 핵공간 =** $\{x \in \mathrm{R}^n \mid Ax = 0\}$

$null(A)$ **= 핵공간의 차원**

일차독립, 일차종속.

고유치(λ), 고유벡터(x) : $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

[정리3.2] [정리3.5] $n \times n$ **정방행렬에 대하여 다음은 동치이다.**

(1) A **가 정칙행렬이다 (즉** $\exists A^{-1}$**)**

(2) $Ax = 0$ **는 단 하나의 해** $x = 0$ **을 갖는다.**

(3) $Ax = b$ **가 유일한 해를 갖는다.**

(4) $\det(A) \neq 0$

(5) $rank(A) = n$

(6) $null(A) = 0$

(7) 선형변환 $F(x) = Ax$ **는 단사(1-1) 함수이다.**

(8) A **가 일차독립인** n **개의 열들을 가진다.**

(9) A **가 일차독립인** n **개의 행들을 가진다.**

[정리3.7] 실수(또는 복소수) λ **는** $n \times n$ **행렬** A **의 고유치이다.**

$$\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0$$

Gauss 소거법

[예제3.1] 다음 연립방정식을 Gauss소거법으로 풀어라.

(1) 상삼각화

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \ \text{: 증가행렬}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ \qquad -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ \qquad -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ \qquad -7x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ [\ 2\ ] & -7 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ \qquad -3x_2 + 6x_3 = -3 \\ \qquad\qquad -12x_3 = -3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 \\ [1/2] & -3 & 6 & -3 \\ [\ 2\ ] & [7/3] & -12 & -3 \end{array}\right]$$

(2) 후진대입법

$$x_3 = (-3)/(-12) = 1/4$$

$$x_2 = (-3-6x_3)/(-3) = 3/2$$

$$x_1 = (6-4x_2+2x_3)/2 = 1/4 \qquad \blacksquare$$

Gauss소거법 알고리즘

```
입력 : A, x, b, n
#상삼각화
for k = 1 to n-1
    for i = k+1 to n
        l_ik = a_ik / a_kk
        for j = k+1 to n
            a_ij = a_ij - l_ik a_kj
        end
        b_i = b_i - l_ik b_k
    end
end
```

#후진대입법

$x = b$
for $i = n$ to 1
  $s = 0$
  for $j = i+1$ to n
    $s = s + a_{ij} x_j$
  end
  $x_i = (x_i - s)/a_{ii}$
end

[숙제] p92#1(2) Gauss소거법

피벗원소(pivot element) : Gauss소거법에서 대각선에 나타난 원소

[주의] 피벗원소가 0과 가까우면 계산에서 오차가 커지고, 0이 되면 Gauss소거가 불가능하게 된다. 그런 경우 피하기 위하여, 피벗원소가 있는 행을 절대값이 큰 원소를 가진 다른 행과 교환하여 소거를 진행한다. 이것을 **피벗팅(pivoting)**이라고 한다. **전체피벗**과 **부분피벗**이 있는데, 전체피벗은 시간이 많이 걸리므로 부분피벗이 많이 이용된다.

[예제3.3] $\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ **여기서 ε는 매우 작은 양수이다.**

(풀이) (1) 피벗원소가 ε 인 경우

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + \qquad x_2 = 2 \\ \qquad (1-1/\varepsilon)x_2 = 3-2/\varepsilon \end{cases}$$

컴퓨터의 오차 계산에 따라

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3-2/\varepsilon}{(1-1/\varepsilon)} \approx \dfrac{-2/\varepsilon}{-1/\varepsilon} = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

(2) 피벗원소가 1 인 경우 (1행과 2행을 교환하여)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \qquad x_2 = 3 \\ \quad (1-\varepsilon)x_2 = 2-3\varepsilon \end{cases}$$

컴퓨터의 오차 계산에 따라

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-3\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \approx \dfrac{2}{1} = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

한편, 위 연립방정식의 정확한 해는 $x_1 = \dfrac{1}{1-\varepsilon}$, $x_2 = \dfrac{2-3\varepsilon}{1-\varepsilon}$ **이므로**

참값은 $x_1 \approx 1$, $x_2 \approx 2$ **이다. 즉 (2)가 바른 방법이다.** ■

(숙제) 부분피벗Guass소거법 (필기로 풀기) (예제3.4참조)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

행렬의 기본행연산

(1) 서로 다른 두 행을 바꾼다. (row exchange)

(2) 한 행을 $k(\neq 0)$배 한다.

(3) 한 행에 다른 행의 k배를 더한다.

행렬의 행동치(동치관계)

행렬에 기본행연산을 유한번 행하여 얻은 행렬은 원래 행렬과 행동치이다.

Gauss소거 연립선형방정식 해법

증가행렬과 행동치인 상삼각행렬을 만들어 후진대입법으로 푼다.

기본행렬(3가지 타입)

항등행렬에 기본행연산(3가지 타입)을 행하여 만든 행렬.

(예) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3×3단위행렬의 첫행에 -2를 곱하여 3째행에 더한다.

기본행렬의 성질

(1) 행렬에 기본행연산을 하는 것이나 그 기본행연산을 항등행렬에 행하여 얻어지는 기본행렬을 그 행렬의 왼쪽에서 곱한 것이나 같은 결과를 준다.

(2) 기본행렬의 역행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 기본행렬들의 곱

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(숙제) p102#8   기본행렬들의 곱

LU 분해법

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix}$$

$$= L\,U$$

LU분해후 연립선형방정식 해법

$$Ax = b \iff LUx = b$$

$$\iff Ly = b \;\wedge\; Ux = y$$

[예제3.6]

$$Ax = b \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

먼저, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **를**

전진대입법으로 풀면 $y_1 = 1,\ y_2 = -1/2,\ y_3 = -7/5$

다음으로 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 16/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -7/5 \end{bmatrix}$ **를**

후진대입법으로 풀면 $x_3 = -7/16,\ x_2 = 1/16,\ x_1 = 11/16$ ■

[정의3.15]

벡터공간 V**에 대하여, 함수** $\|\cdot\|: V \to \mathrm{R}$ **를 벡터노름(norm)이라 한다.**

$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ **(1)** $\forall x \in V,\ \|x\| \geq 0$

(2) $\forall a \in \mathrm{R},\ \forall x \in V,\ \|ax\| = |a|\,\|x\|$

(3) $\forall x, y \in V,\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(삼각부등식)**

(4) $(\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0\ )$

[정의] 벡터공간에서 $x_n \to x \overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \|x_n - x\| \to 0$

노름(norm)의 예

벡터 공간 $V = \mathrm{R}^n$**의 원소** $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$**에 대하여 다음 정의되는 함수들은 노름이 된다.**

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

[예제3.9] 벡터 $x=[3,-2,4]^T$에 대하여, $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ 를 구하여라.

행렬의 노름

$$\|A\| \overset{\text{정의}}{=} \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

벡터노름에 따라

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}, \quad \|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad \|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

행렬노름의 성질

(1) $\|A\| \geq 0$

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(5) $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$

(6) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

(7) $\|I\| = 1$, I는 항등행렬

(증명) (5) $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ **이므로**

모든 $x \neq 0$ **에 대하여**

$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\|$ **이다. 그러므로** $\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\|$ **이다.**

모든 $x = 0$ **에 대하여,** $Ax = 0$ **이고** $\|0\| = 0$ **이므로**

$\|Ax\| = 0 = \|A\|\,\|x\|$ **이므로 역시 성립한다.** ■

[정리3.18] $n \times n$ **행렬** $A = [a_{ij}]$ **에 대하여,**

(1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ **(2)** $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

(증명)

(1) $\|Ax\|_\infty = \|\,[\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j]\,\|_\infty$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| |x_j|$$

$$\le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right) \|x\|_\infty$$

$x \ne 0$ **에 대하여,**

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right)$$

그러므로 $\|A\|_\infty = \max_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \left(\max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right)$ **--[1]**

반대방향의 부등호를 보이기 위하여 특별한 x **를 선택하여 보자.**

$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|$ 들 중에서 $i=k$에서 최대값을 가진다고 할 때, 즉

$$\max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}| = |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}|$$

라고 할 때, $x=[x_j]$를 다음과 같이 정의하자.

$$x_j = \begin{cases} \dfrac{a_{kj}}{|a_{kj}|}, & a_{kj} \neq 0 \\ \quad 1 \quad , & a_{kj} = 0 \end{cases}$$

그러면 모든 $|x_j|=1$이 되어 $\|x\|_\infty = 1$ 임을 알 수 있다.   그래서

$$\|Ax\|_\infty = \|\,[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j]\,\|_\infty \quad = \max_{1 \le i \le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j|$$

$$\ge |\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j| \;\ge |\sum_{\substack{j=1 \\ a_{kj} \neq 0}}^{n} a_{kj} \frac{a_{kj}}{|a_{kj}|}|$$

$$\geq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ a_{kj} \neq 0}}^{n} \frac{|a_{kj}|^2}{|a_{kj}|} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

그러므로

$$\|Ax\|_\infty \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

그런데 $\|x\|_\infty = 1$ **이므로**

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|$$

따라서

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right| \right) \quad \textbf{--[2]}$$

[1],[2] 에 의하여 결론이 증명되었다. ■

[예제3.10] 다음 행렬 A에 대하여 $\|A\|_\infty$와 $\|A\|_1$을 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

(풀이)

(1) $$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{9, 6, 10\} = 10$$

(2) $$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{7, 9, 9\} = 9 \quad ■$$

조건상수

A가 정칙행렬(=역행렬를 가진 행렬)일 때,

$$\varkappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

을 A의 조건상수라고 한다.

[예제3.11] 다음 행렬의 조건상수를 $\|\cdot\|_\infty$ 을 사용하여 구하여라.

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (0<\varepsilon<1)$$

(풀이)

$$A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 1 & -1-\varepsilon \\ -1+\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$ **이므로**

$\|A_\varepsilon\|_\infty = 2+\varepsilon,\ \|A_\varepsilon^{-1}\|_\infty = \dfrac{1}{\varepsilon^2}(2+\varepsilon)$ **이다 따라서**

$$\varkappa(A) = \|A\|_\infty\ \|A^{-1}\|_\infty = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \quad \blacksquare$$

[참고]

예제3.11에서 ε 이 0 (zero)로 가면 행렬 A_ε 는 비정칙행렬로 가까이 간다. 그 때 조건상수는 무한히 커진다. 한편 A 가 정칙 행렬이면

$1 = \|I\| = \|A\,A^{-1}\| \le \|A\|\|A^{-1}\| = \varkappa(A)$ **이다.**

잉여벡터(residual vector) : $b - A\tilde{x}$

[정리3.20] A**가 정칙행렬일때 선형연립방정식** $Ax = b\ (b \neq 0)$**의**

참해를 x^* **라고 하고, 근사해를** $\tilde{x}$ **할 때, 다음이 성립한다.**

$$\frac{1}{\varkappa(A)}\frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|} \le \frac{\|\tilde{x} - x^*\|}{\|x^*\|} \le \varkappa(A)\frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|b\|}$$

(둘째 부등식 증명)

$$b - A\tilde{x} = Ax^* - A\tilde{x}$$

$$= A(x^* - \tilde{x})$$ **이므로**

$$x^* - \tilde{x} = A^{-1}(b - A\tilde{x})$$ **이다.**

따라서

$$\|x^* - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - A\tilde{x})\|$$

$$\le \|A^{-1}\|\,\|b - A\tilde{x}\| \quad \text{--[1]}$$

한편 $b = Ax^*$ **로부터,**

$$\|b\| = \|Ax^*\|$$

$$\le \|A\|\,\|x^*\|$$

따라서

$$\frac{1}{\|x^*\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad \text{--[2]}$$

[1], [2] 로부터

$$\frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|} \le \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|(b - A\tilde{x})\|}{\|b\|}$$

$$= \kappa(A)\,\frac{\|(b - A\tilde{x})\|}{\|b\|} \qquad \blacksquare$$

(숙제) 위 예제3.20 의 첫 번째 부등식 증명

불량조건행렬

정리3.20 으로부터 조건상수가 크면 잉여벡터의 크기 $\|b - A\tilde{x}\|$가 아무리 작더라도 근사해 $\tilde{x}$의 참해 x^*에 대한 상대오차 $\dfrac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|x^*\|}$가 커질수 있다 것을 알 수 있다. 이와 같이 조건상수가 큰 행렬을 **불량조건행렬**(ill-conditioned matrix)라고 한다.

그러니까 불량조건이면 벡터 b(보통 실험 관찰에서 얻어지는 수치)의 조그만 오차에도 근사해의 오차가 커질 수 있다는 점을 알 수 있다.

선형연립방정식($Ax = b$)해법

1) **직접법** : 가우스소거법(LU분해법) - 많은 연산량과 기억량 필요
2) **간접법** : 반복법 – 적은 연산량과 기억량 필요.

행렬(A) 분할

$A = M - N$ 여기에서 M 은 정칙행렬($\exists\, M^{-1}$).

반복법(iterative method)

$$Ax = b$$

$$(M - N)x = b$$

$$Mx = Nx + b$$

초기(추측)벡터 $x^{(0)}$

k 단계 근사수열 $x^{(k)}$: $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b,\ k = 1, 2, 3, \cdots$

[정리 3.22] 반복법 수렴의 조건

행렬의 분할 $A = M - N$에 대하여, 만약 $\|M^{-1}N\| \leq \alpha < 1$ 이면, 임의의 초기벡터에 $x^{(0)}$ 에 대하여, 반복법 $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ 에 의하여 주어진 수열 $< x^{(k)} >$ 는 $Ax = b$의 정확한 해 x^{*}에 수렴한다

또한
$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \alpha^k \|x^{(0)} - x^*\|$$
$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

(증명)

정확한 해 x^*는 방정식 $Ax = b$을 만족하므로 $Ax^* = b$이다.

그러므로

$$Ax^* = b \implies (M-N)x^* = b$$
$$\implies Mx^* = Nx^* + b$$
$$\implies M(x^{(k)} - x^*) = Mx^{(k)} - Mx^*$$
$$= (Nx^{(k-1)} + b) - (Nx^* + b)$$
$$= N(x^{(k-1)} - x^*)$$
$$\implies (x^{(k)} - x^*) = M^{-1}N(x^{(k-1)} - x^*)$$

$$\Longrightarrow \ \|x^{(k)}-x^{*}\| = \|M^{-1}N(x^{(k-1)}-x^{*})\|$$

$$\le \|M^{-1}N\|\,\|x^{(k-1)}-x^{*}\|$$

$$\le \alpha\,\|x^{(k-1)}-x^{*}\|$$

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)}-x^{*}\| \le \alpha\,\|x^{(k-1)}-x^{*}\|$ **-- [1]**

$\le \alpha\,\alpha\|x^{(k-2)}-x^{*}\|$ **by [1]**

$$\le \alpha^{2}\,\|x^{(k-2)}-x^{*}\|$$

$$\le \cdots$$

$$\le \alpha^{k}\,\|x^{(0)}-x^{*}\|$$

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)}-x^{*}\| \le \alpha^{k}\,\|x^{(0)}-x^{*}\|$ **-- [2]**

$\Longrightarrow \ \|x^{(k)}-x^{*}\| \to 0$ **since** $\alpha^{k} \to 0$ **as** $k \to \infty$

$$\Longrightarrow \ x^{(k)} \to x^{*}$$

두 번째 부등식을 증명해 보자.

$$\|x^{(0)} - x^{*}\| = \|x^{(0)} - x^{(1)} + x^{(1)} - x^{*})\|$$

$$\le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \|x^{(1)} - x^{*})\| \text{ , by 삼각부등식}$$

$$\le \|x^{(0)} - x^{(1)}\| + \alpha\|x^{(0)} - x^{*})\|$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)\|x^{(0)} - x^{*}\| \le \|x^{(0)} - x^{(1)}\|$$

$$\Rightarrow \|x^{(0)} - x^{*}\| \le \frac{1}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\| \text{ --[3]}$$

[2]로부터, $\|x^{(k)} - x^{*}\| \le \alpha^{k}\|x^{(0)} - x^{*}\|$

$$\le \frac{\alpha^{k}}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\| \text{ by [3]}$$

그러므로

$$\|x^{(k)} - x^{*}\| \le \frac{\alpha^{k}}{(1-\alpha)}\|x^{(0)} - x^{(1)}\| \quad \blacksquare$$

[설명]

정리3.22 로부터, 수렴하기 위한 충분조건으로 $\|M^{-1}N\| < 1$인 분할 $A = M - N$을 찾아야 하고, $Mx^{(k)} = Nx^{(k-1)} + b$ 와 같이 각 단계에서 $x^{(k)}$를 얻으려면 M을 계수로 갖는 연립방정식을 쉽게 풀 수 있어야 한다.

Rechardson 방법

$M = I$ 으로 선택하면, $N = I - A$가 된다. 그러므로

$$x^{(k)} = (I - A)x^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

Jacobi 방법

$M = D$ 으로 선택하면, $N = -L - U$ 가 된다. 그러므로

$$Dx^{(k)} = (-L - U)x^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

여기서 $A = L + D + U$, D:대각행렬, L:하삼각행렬, U:상삼각행렬

Gauss-Seidel 방법

$M = L + D$ 으로 선택하면, $N = -U$ 가 된다. 그러므로

$$(D+L)x^{(k)} = -Ux^{(k-1)} + b \ , \ k = 1,2,3,\cdots$$

여기서 $A = L + D + U$, D:대각행렬, L:하삼각행렬, U:상삼각행렬

[정의3.23]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \ 1 \le {}^{\forall} i \le n, \ \left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \right) < |a_{ii}|$$

[정리3.24]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이면, 임의의 초기벡터 $x^{(0)}$에 대하여, Jacobi 방법은 항상 $Ax = b$ 의 해에 수렴한다.

(증명)

정리3.22에 의하여 $\|D^{-1}(-L-U)\|<1$**를 보이면 된다.**

노름은 아무나 선택해도 되므로, $\|D^{-1}(-L-U)\|_\infty<1$ **을 보이자.**

$$D^{-1}(-L-U)$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1/a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|D^{-1}(-L-U)\|_{\infty} = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right)$$ **by 정리3.18**

그런데 A**가 강대각지배행렬이므로,** $1 \le {}^{\forall} i \le n$**,**

$$\left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} |a_{ij}| \right) < |a_{ii}|$$

따라서,

$$\left(\sum_{j=1, j \ne i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right) < 1$$

그러므로

$$\|D^{-1}(-L-U)\|_{\infty} < 1 \qquad \blacksquare$$

[정리3.29]

$n \times n$ 행렬 A는 강대각지배행렬이면, 임의의 초기벡터 $x^{(0)}$에 대하여, Gauss-Seidel 방법은 항상 $Ax=b$의 해에 수렴한다.

Jacobi 방법 실행

$$Ax=b$$

$$(L+D+U)x=b$$

$$Dx=(-L-U)x+b$$

$$Dx^{(k)}=(-L-U)x^{(k-1)}+b\ ,\ k=1,2,3,\cdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcllllll}
a_{11}x_1^{(k)} & = & 0 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(k-1)} & +b_1 \\
a_{22}x_2^{(k)} & = & -a_{21}x_1^{(k-1)} & +\ 0 & -a_{23}x_3^{(k-1)} & \cdots & -a_{2n}x_n^{(k-1)} & +b_2 \\
\cdots & = & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{nn}x_n^{(k)} & = & -a_{n1}x_1^{(k-1)} & -a_{n2}x_2^{(k-1)} & -a_{n3}x_3^{(k-1)} & \cdots & 0 & +b_n
\end{array}$$

Jacobi 알고리즘

입력 : $n, A, x^{(0)}, b, kmax$
for $k=1$ **to** $kmax$
  for $i=1$ **to** n
    $s=0$
    for $j=1$ **to** n
      if($j \neq i$ **)** $s=s-a_{ij}x_j$
    end
    $y_i=(s+b_i)/a_{ii}$
  end
  $x=y$
end

(숙제) 다음 주어진 초기벡터 $x^{(0)}$를 이용하여 Jacobi 방법으로 다음 선형연립 방정식을 풀어라.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 지필 숙제로 3회 반복하여 근사해를 구하여라.

(2) 컴퓨터 숙제로 $\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\| < 1.0E-2$ 제한조건으로 실행하라.

Gauss-Seidel 방법 실행

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(D + L)x = -Ux + b$$

$$(D + L)x^{(k)} = -Ux^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

$$D\,x^{(k)} = -Lx^{(k)} - Ux^{(k-1)} + b \text{ , } k = 1,2,3,\cdots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{array}{lclllllll}
a_{11}x_1^{(k)} & = & 0 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} & -a_{14}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(k-1)} & +b_1 \\
a_{22}x_2^{(k)} & = & -a_{21}x_1^{(k)} & +\quad 0 & -a_{23}x_3^{(k-1)} & -a_{24}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{2n}x_n^{(k-1)} & +b_2 \\
a_{33}x_3^{(k)} & = & -a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & +\quad 0 & -a_{34}x_4^{(k-1)} & \cdots & -a_{3n}x_n^{(k-1)} & +b_3 \\
\cdots & = & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{nn}x_n^{(k)} & = & -a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -a_{n3}x_3^{(k)} & \cdots & \cdots & 0 & +b_n
\end{array}
$$

Gauss-Seidel 알고리즘

입력 : $n, A, x^{(0)}, b, kmax$

for $k=1$ **to** $kmax$
  for $i=1$ **to** n
    $s=0$
    for $j=1$ **to** n
      if($j \neq i$ **)** $s=s-a_{ij}x_j$
    end
    $x_i=(s+b_i)/a_{ii}$
  end
end

[숙제] Jacobi 숙제와 동일

제4장 행렬의 고유치 문제

고유벡터와 고유치

$n \times n$ 정방행렬 A에 대하여 n차원 벡터 $\mathbf{x}\,(\neq 0)$를 A의 **고유벡터 (eigen vector)**라고 한다.

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ($\exists$ 상수 λ, 벡터 $\mathbf{x} \neq 0$: $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$)

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ ($(\mathbf{x} \neq 0,\ \mathbf{y} = A\mathbf{x}) \Rightarrow \mathbf{x} // \mathbf{y}$)

: 행렬로 선형변환하여도 방향을 바꾸지 않은 벡터.

여기에서 상수 λ를 A의 **고유치(eigen value)** 라고 한다.

고유치와 고유벡터을 묶은 쌍을 $(\lambda, \mathbf{x})$를 A의 **고유쌍(eigen pair)** 라고 한다.

고유방정식 (특성방정식)

λ 에 관한 방정식 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$ 을 풀기 위하여 $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$을 변형하면

$$(A - \lambda I)\mathrm{x} = \mathbf{0}$$

가 되고, $\mathbf{0}$ 이 아닌 벡터 x 가 위 식의 영이 아닌 해가 되기 위한 필요충분조건은

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

이다. 위 방정식을 **고유방정식**(eigen equation) 또는 **특성방정식**(characteristic equation)이라고도 한다.

고유치 해법

$n \times n$ 정방행렬 A에 대한 고유방정식은 λ에 대한 n차 대수 방정식이므로 중근이 없다면 최대 n개의 고유치가 있을 수 있다. 고유치를 구하려면 n차방정식을 풀면 되지만, 5차이상은 근의 공식이 없고, 고차방정식은 계수들의 작은 오차에도 근의 근사값의 오차가 크다. 따라서 고유치를 구하기 위하여는 반복법과 같은 다른 접근이 필요하다.

고유벡터의 비유일성과 고유공간

행렬 A의 고유벡터 $\mathbf{x}$의 스칼라 k배인 $k\mathbf{x}$도 A의 고유벡터가 된다. 왜냐하면,

$$A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x} = k\lambda\mathbf{x} = \lambda(k\mathbf{x})$$

$$\text{즉} \quad A(k\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$$

이다. 어떤 고유치 λ에 대응하는 모든 고유벡터들의 집합을 고유공간(eigen space)이라고 한다.

고유벡터의 일차독립성

어떤 행렬 A의 서로 다른 고유치에 해당하는 고유벡터는 일차독립이다.

(증명) $(\lambda_1, \mathbf{x}_1), (\lambda_2, \mathbf{x}_2), \cdots, (\lambda_n, \mathbf{x}_n)$, $(\forall i, j,\ \lambda_i \neq \lambda_j)$를 고유쌍들이라고 하자.

만약 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_j$, $j < n$ 가 일차독립인 최대갯수라고 가정하면

모두는 0이 아닌 상수들 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$가 존재하여

$$\mathbf{x}_{j+1} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\mathbf{x}_j \quad \text{--(1)}$$

로 표시된다. 양변에 행렬 A를 곱하여

$$A\mathbf{x}_{j+1} = A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\mathbf{x}_j)$$

$$\lambda_{j+1}\mathbf{x}_{\mathrm{j}+1} = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j A\mathbf{x}_j$$

$$\lambda_{j+1}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_{\mathrm{j}}\mathbf{x}_j) = \alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j\lambda_{\mathrm{j}}\mathbf{x}_j$$

$$\alpha_1(\lambda_{j+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \alpha_2(\lambda_{\mathrm{j}+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_j(\lambda_{\mathrm{j}+1} - \lambda_{\mathrm{j}})\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

$\beta_1\mathbf{x}_1 + \beta_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ **여기에서** $\beta_k = \alpha_k(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$**.**

그런데 (1)에서 $\exists\,\alpha_k \neq 0$ **이므로** $\exists\,\beta_k = \alpha_k(\lambda_{j+1} - \lambda_k) \neq 0$ **이다.**

이것은 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_j$ **가 일차독립이라는 사실에 모순이다. 따라서**

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n$ **들 중에서 일차독립인 최대갯수** j**는** $j < n$**이면 안된다.**

즉 $j = n$**이어야 한다.** ■

[주의] 서로 다른 고유치의 수와 대응하는 고유벡터 수는 일치하지 않는다.

[예제 4.1]

행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 의 고유치 λ_1, λ_2 는 모두 0 이지만, 대응하는 고유벡터는

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 뿐이다.

행렬 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 고유치 λ_1, λ_2 는 모두 1 이지만, 대응하는 고유벡터는

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

[숙제] p127 #2

유사행렬(similar matrix)

$n \times n$ 정방행렬 A, B 에 대하여,

B 는 A 의 **유사변환**이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists\, S : B = SAS^{-1}$$

$\overset{\text{정의}}{\Longleftrightarrow}$ A, B 는 **유사하다**. ($A \overset{s}{\sim} B$)

(주의) $\overset{s}{\sim}$ 는 $n \times n$ 정방행렬들에서 동치관계이다.

그러므로 B 가 A 의 유사변환이면 A 도 B 의 유사변환이다.

[정리4.2] 행렬 A의 고유쌍이 (λ, x)이고 $B = SAS^{-1}$이면, $(\lambda, S\mathrm{x})$는 B의 고유쌍이 된다.

(증명) $A\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x} \Rightarrow S^{-1}BS\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}$

$\Rightarrow BS\mathrm{x} = S\lambda\mathrm{x}$ 양변에 왼쪽에 S를 곱하여

$= \lambda S\mathrm{x}$

$\Rightarrow B(S\mathrm{x}) = \lambda(S\mathrm{x})$

[정리4.3] Schur 정리

모든 $n \times n$ 행렬은 삼각행렬과 유사하다.

[주의] Schur 정리는 삼각행렬의 존재성만 보여주고, 삼각행렬을 계산하는 방법은 제공하지 않는다. (상, 하)삼각행렬과 대각행렬의 고유치는 그 대각원소의 값들이 된다.

벡터의 직교

두 벡터 x,y 가 $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{y}=0$ 를 만족하면 두 벡터는 직교(orthogonal)하다.

직교행렬

정방행렬 Q가 $Q^TQ=QQ^T=I$를 만족 하면 행렬 Q를 직교행렬 (orthogonal matrix)라고 한다.

[정리4.5] $n\times n$ 행렬 A 이 대칭행렬이면,

(1) 모든 고유치 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 가 실수이다.

(2) 직교하는 n개의 단위 고유벡터 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots \mathrm{v}_n$ 들이 존재한다.

(3) 고유벡터 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots \mathrm{v}_{\mathrm{n}}$ 들이 기저를 이룬다. 즉 모든 벡터들은 고유벡터들의 일차결합으로 표시된다.

(4) 대각행렬 $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$, $Q=[\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots,\mathrm{v}_n]$ 라고 하면

$$A[\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\cdots,\mathrm{v}_n]=[\lambda_1\mathrm{v}_1,\lambda_2\mathrm{v}_2,\cdots,\lambda_n\mathrm{v}_n] \text{ 즉 } AQ=QD$$

그러므로 $A=QDQ^T$ 또는 $D=Q^TAQ$가 된다.

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \left[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ \mathbf{v}_n \\ \\ \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Q\mathbf{x}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{v} \arrow[rr, "\mathbf{w} = A\mathbf{v}"] \arrow[d, "\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{v}"] & & \mathbf{w} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \\
\mathrm{R}^{\mathrm{n}} \ni \mathbf{x} \arrow[rr, "\mathbf{y} = D\mathbf{x}"'] & & \mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \arrow[u, "\mathbf{w} = Q\mathbf{y}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{w} = QDQ^{-1}\mathbf{v}$

$\mathbf{x} = Q^{-1}\mathbf{v}$

$\mathbf{y} = DQ^{-1}\mathbf{v}$

그러므로 $A = QDQ^{-1}$ **또는** $D = Q^{-1}AQ$ **이다.**

(주의) Q **는 직교행렬이므로** $Q^{-1} = Q^T$ **이다.**

[숙제] p132 예제 4.2 (필기 숙제)

거듭제곱법(멱방법)

$n \times n$ 실수행렬 A 이 n 개의 고유치 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 와 일차독립인 고유벡터 $\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n$ 를 가지고

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

를 만족한다고 가정하자. 임의의 초기벡터 x_0 에 대하여, 반복법

$$\mathrm{x}_k = A^k \mathrm{x}_0, \ k = 1, 2, \cdots$$

을 **거듭제곱법**(power method)라고 한다. 실제 실행할 때, x_k의 크기가 너무 크거나 작아지면, 오차 발생이 커지므로, 도중에 적당히 크기 조절을 해준다.

[정리] 거듭제곱방법에서 벡터 x_k 는λ_1 절대치가 가장 큰 고유치 에 대응하는 벡터 v_1에 수렴한다.

(증명)

고유벡터 $\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n$ 들이 일차독립이므로 초기벡터 x_0 는 고유벡터들의

일차결합으로 표시될 수 있다. 즉

$$\exists\, c_1, \cdots, c_n : \mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

이다. 그러면

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k &= A^k\mathbf{x}_0 \\
&= A^k(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathrm{c}_n\mathbf{v}_n) \\
&= c_1A^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_nA^k\mathbf{v}_n \\
&= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n \\
&= \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_n \right)
\end{aligned}$$

그런데, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n| \ge 0$ **로부터**

$$1 > \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \ge \frac{|\lambda_3|}{|\lambda_1|} \ge \cdots \ge \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

이므로 $k \to \infty$ 에 따라, $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| \to 0 \ \ (2 \le {}^\forall i \le n)$ 이므로

$$\mathbf{x}_k \to C\mathbf{v}_1$$

와 같이 수렴한다. ■

거듭제곱법에서 고유치구하기

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_k\end{aligned}$$

이므로 $1 \le i \le n$ 인 어떤 i에 대하여 $(\mathbf{x}_k)_i$ 는 $\mathbf{x}_k$의 i번째 성분이고,

고유치의 근사값은 $\lambda_1 = (\mathbf{x}_{k+1})_i \,/\, (\mathbf{x}_k)_i$ 로 계산될 수 있다.

[예제4.4] 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$에 초기벡터 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$를 이용하여 거듭제곱 방법을 실행하여 절대치가 가장 큰 고유치와 대응하는 고유벡터를 구하여라.

[숙제] p149 1-(1) : 거듭제곱법

역거듭제곱법

정칙행렬 A의 고유치 $\lambda_i(\neq 0)$와 고유벡터 v_i에 대하여 고유방정식 $A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i$ 의 양변에 역행렬 A^{-1}을 곱하면

$$\mathrm{v}_i = A^{-1}(\lambda_i \mathrm{v}_i)$$

$$\mathrm{v}_i = \lambda_i A^{-1}(\mathrm{v}_i)$$

$$\frac{1}{\lambda_i}\mathrm{v}_i = A^{-1}(\mathrm{v}_i)$$

$$A^{-1}(\mathrm{v}_i) = \frac{1}{\lambda_i}\mathrm{v}_i$$

따라서 역행렬 A^{-1}은 고유치 $\frac{1}{\lambda_i}$ 와 고유벡터 v_i 를 갖는다. 즉 역행렬에 거듭제곱방법을 적용하면 절대치가 가장 작은 고유치를 구할 수 있다. 이 방법을 **역거듭제곱법**(inverse power method)라고 한다.

[예제] 역거듭제곱법으로 절대치가 가장 작은 고유치와 그 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

이동된역거듭제곱법(shifted inverse power method)

고유치가 아닌 특정상수 a에 대하여 고유방정식 $A\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i$ 으로부터 $aI\mathrm{v}_i = a\mathrm{v}_i$ 를 양변에서 빼면

$$A\mathrm{v}_i - aI\mathrm{v}_i = \lambda_i \mathrm{v}_i - a\mathrm{v}_i$$

$$(A - aI)\mathrm{v}_i = (\lambda_i - a)\mathrm{v}_i$$

$$(A - aI)^{-1}\mathrm{v}_i = \frac{1}{\lambda_i - a}\mathrm{v}_i$$

그러므로 행렬 $(A - aI)^{-1}$에 거듭제곱방법을 적용하면 고유치

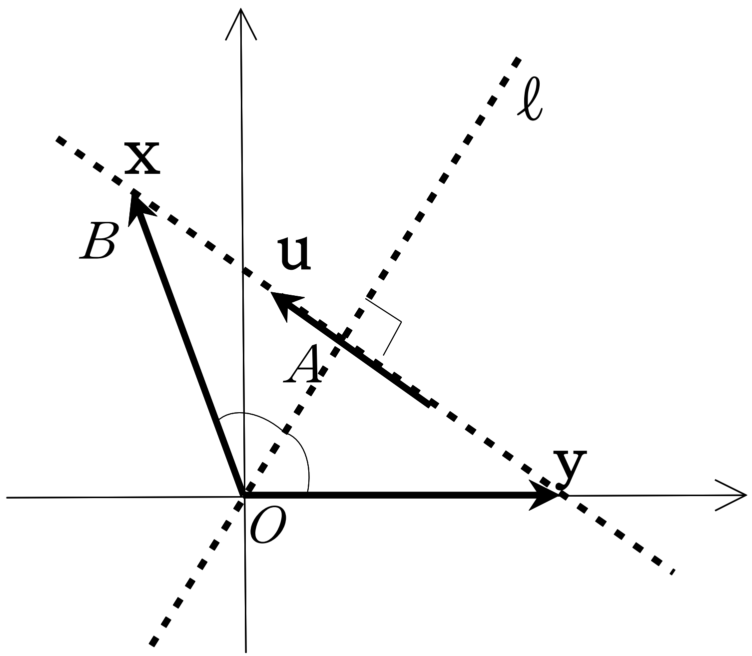
$$\frac{1}{\lambda_1 - a}, \frac{1}{\lambda_2 - a}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n - a}$$

중에서 절대치가 가장 큰 고유치 $\dfrac{1}{\lambda_k - a}$와 그에 대응하는 고유벡터 v_k를 구할 수 있다. 그것으로부터 행렬 A의 고유치 중에서 특정상수 a에 가장 가까운 고유치 λ_k와 그에 대응하는 고유벡터 v_k를 구할 수 있다. 이 방법을 **이동된역거듭제곱법(shifted inverse power method)**라고 한다.

[숙제] p148 예제4.5 : 이동된역거듭제곱법 ($a = 7.0$)

Householder 변환

크기가 같은 두 벡터 x와 y의 종점을 잇는 선분의 수직이등분선 ℓ을 기준선으로 벡터들을 대칭(거울)변환하는 것을 **Householder 변환**이라고 한다. 대칭변환이기 때문에 한번 더 변환하면 원래로 돌아온다. 즉 $HH = I$가 된다.



선분 $\overline{AB}$ 의 길이는 단위벡터 $\mathrm{u} = \dfrac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|}$ 를 이용하여 내적 $\mathrm{x} \cdot \mathrm{u}$ 로 주어지고, 벡터 $(\mathrm{x}-\mathrm{y})$는 $(\mathrm{x}-\mathrm{y}) = 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$ 로 주어진다.

그러므로 $\mathrm{y} = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x} \cdot \mathrm{u})\mathrm{u}$

$$= \mathrm{x} - 2(\mathrm{u} \cdot \mathrm{x})\mathrm{u} = \mathrm{x} - 2\mathrm{u}\,(\mathrm{u} \cdot \mathrm{x})$$

$$= \mathrm{x} - 2\mathrm{u}\,(\mathrm{u}^{\mathrm{T}}\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2\,(\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}})\mathrm{x}$$

$$= (I - 2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}})\mathrm{x} \overset{\text{정의}}{=} H\mathrm{x}$$

여기에서 행렬 $H = (I - 2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{T})$ 를 **Householder 행렬**이라고 한다. 이 행렬을 이용하면 어떤 벡터를 원하는 좌표축이나 좌표(초)평면으로 대칭변환하여, 최소 1 개를 제외한 나머지 성분들이 0 (제로)가 되도록 변환할 수 있다. 그런데 위에서 벡터 y 의 종점을, 양의 좌표축 위에만 아니라, 음의 좌표축 위에도 선택할 수 있는데, 컴퓨터 계산 중 뺄셈에 의한 오차를 줄이기 위해서는, x 의 종점에서 먼 방향의 좌표축 위에 위치하도록 y 를 선택하는 것이 좋다.

[예제4.6] 벡터 $\mathrm{x} = [4, 1, -2, 2]^{T}$ 를 길이가 같고, 3번과 4번째 성분이 0 이 되는 벡터로 변환하는 Householder행렬을 찾아라.

(풀이) **벡터** $\mathbf{x}$**와 길이가 같고,** 3**번째와** 4**번째 성분이** 0**이 되는 벡터** $\mathbf{y}$**를**

$\mathbf{y} = [4, a, 0, 0]^T$**라 하면,**

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \Rightarrow \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$$

$$= \pm 3$$

$\mathbf{y}$**의** 2**번째 성분** a**의 부호를** $\mathbf{x}$**의** 2**번째 성분** 1**의 부호와 반대 쪽을**

택하면 $a = -3$ **이 된다. 그러므로**

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = [4, 1, -2, 2]^T - [4, -3, 0, 0]^T$$

$$= [0, 4, -2, 2]^T$$

$$\Rightarrow \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{24}}[0, 4, -2, 2]^T$$

그러므로 Householder 행렬은

$$H=(I-2\mathrm{u}\,\mathrm{u}^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

이다. ■

[숙제] 예제4.6에서 첫 번 성분만 제외하고 모두 0 (제로)가 되는 벡터, 즉 $\mathrm{y}=[\mathrm{a},0,0,0]$ 로 변환하는 Householder 행렬을 구하라.

제2고유치 구하기(수축방법)

행렬 A의 고유치 λ에 대응하는 고유벡터 $\mathrm{v}=[v_1, v_2, \cdots, v_n]$를 크기가 같고, 첫 번 성분을 제외한 나머지 모든 성분이 모두 0 (제로)가 되고, 첫 성분이 v_1와 반대 부호를 갖는 벡터로 변환하는 Householder 행렬을 H라고 하자.

즉

$$H\mathrm{v} = a\,\mathrm{e}_1 \qquad (a = -\,sign(v_1)\|\mathrm{v}\|) \quad \text{--(1)}$$

이다. 고유 방정식 $A\mathrm{v} = \lambda\mathrm{v}$ 의 양변에 행렬 H를 곱하여

$$\begin{aligned}
HA\mathrm{v} &= H\lambda\mathrm{v} \\
&= \lambda H\mathrm{v} \quad \text{by 선형성} \\
&= \lambda a\,\mathrm{e}_1 \quad \text{by (1)} \\
&= a\lambda\mathrm{e}_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad a\lambda\mathrm{e}_1 &= HA\mathrm{v} \\
&= HA(HH)\mathrm{v} \quad \text{by } HH = I \\
&= HAH(H\mathrm{v}) \quad \text{by 결합법칙} \\
&= HAH(a\,\mathrm{e}_1) \quad \text{by (1)} \\
&= a\,HAH(\mathrm{e}_1) \quad \text{by 선형성}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad (HAH)\mathrm{e}_1 = \lambda\,\mathrm{e}_1 \quad \text{by } a \neq 0$$

(HAH의 고유(치,벡터)가 λ, e_1이 됨)

$$\Rightarrow \quad (HAH)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 위 우변은 행렬 HAH의 첫 열벡터이다. 따라서

$$HAH = \begin{bmatrix} \lambda & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

행렬 HAH는 A와 유사행렬이므로 HAH의 고유치들은 A의 고유치들과 같고, 행렬 B는 λ를 제외한 A의 모든 고유치들을 갖고 있다. (정리4.7참조) 행렬 B를 A의 수축행렬이라고 한다. 수축행렬 B에 거듭제곱법을 행하면 A의 제2의 고유치를 구할 수 있다. ■

제2고유벡터 구하기

수축행렬 B에 거듭제곱법을 행하여 얻은 고유치 λ_1 과 고유벡터 w로부터 행렬 HAH의 고유벡터 x 를 거쳐, 행렬 A의 고유벡터 v_1 를 구해보자.

우선 고유치 λ_1 에 대응하는 행렬 HAH의 고유벡터를 x 라고 하자. 즉

$$(HAH)\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & r_1 & \cdots & r_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{--(1)}$$

위 식의 2행부터 n행까지 방정식을 모으면 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

여기에서, B **의 고유치** λ_1 **에 대응하는 고유벡터가** $\mathrm{w} = [x_{2,} x_{3,} \cdots, x_n]^T$ **임을 알 수 있다. 즉** HAH **행렬의 고유벡터의 성분** $x_{2,} x_{3,} \cdots, x_n$ **은** B **에 거듭제곱법을 실시하여 얻는 고유벡터** w **로부터 얻을 수 있다. 나머지 성분** x_1 **을 구하자면, 식 (1)에서** 1 **행만 모으면**

$$\lambda x_1 + \mathbf{r}^T \mathrm{w} = \lambda_1 x_1$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{\mathbf{r}^T \mathrm{w}}{\lambda_1 - \lambda} \text{ , } \mathbf{r} = [r_{1,} r_{2,} \cdots, r_{n-1}]^T$$

이렇게 구해진 HAH **의 고유벡터** x **를 이용하여, 이제 행렬** A **의 고유벡터** v_1 **을 구해보자.**

$$(HAH)\mathrm{x} = \lambda_1 \mathrm{x}$$

$$\Longrightarrow \quad H(HAH\mathrm{x}) = H(\lambda_1 \mathrm{x}) \quad \textbf{by 양변에 } H \textbf{ 곱하기}$$

$$\Longrightarrow \quad AH\mathrm{x} = \lambda_1 H\mathrm{x} \quad \textbf{by } HH = I \textbf{ 와 선형성}$$

$$\Rightarrow \quad A(H\mathrm{x}) = \lambda_1 (H\mathrm{x}) \quad \text{by 결합법칙}$$

$$\Rightarrow \quad A\mathrm{v}_1 = \lambda_1 \mathrm{v}_1 \quad \text{with } \mathrm{v}_1 = \mathrm{H}\,\mathrm{x}$$

그러므로 행렬 A 의 고유벡터 v_1 는 $\mathrm{v}_1 = \mathrm{H}\,\mathrm{x}$ 로 계산할 수 있다. ■

[예제4.7] 행렬 A 가 고유치 $\lambda = 4$ 와 고유벡터 $\mathrm{v} = [1, -2, 2]^T$ 을 갖고 있을 때 수축방법을 이용하여 제2의 고유치 λ_1 과 대응하는 고유벡터 v_1 를 구하여라. (컴퓨터 사용)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[숙제] p161 #9 (컴퓨터 사용)

제5장 근사함수

근사함수

어떤 함수와 가깝다고 여겨져서 그 함수를 대신하여 사용하는 함수를 근사함수 (approximation function)라고 한다.

(예) $e^x \approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+ \cdots +\frac{1}{n!}x^n$

근사함수의 이용

(예) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \approx \int_1^2 (-\frac{3}{4}(x-1)+1)dx$

함수 $g(x)=-\frac{3}{4}(x-1)+1$는 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 근사함수 인데, $f(1)=g(1)$, $f(2)=g(2)$이고 $g(x)$는 $f(x)$보다 "간편한" 1차 함수이다. (→사다리꼴공식)

노름의 이용

함수들 사이에의 "가까움", 즉 거리를 측정하는 방법으로 여러 가지 노름이 사용된다.

(예) f **가 구간** $[a,b]$ **에서 연속 함수일 때, 함수간의 거리는** $d(f,g) = \|f-g\|$ **로 측정하며, 함수의 노름의 예들은 다음과 같은 것들이 있다.**

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,w(x)\,dx$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f\|_\infty = \max\{\,|f(x)|\;:\;a \le x \le b\}$$

여기에서 $w(x)(\ge 0)$ **를 "가중함수"(weight function)라고 한다.**

근사함수 찾기

주어진 함수 $f \in C[a,b]$ **와** $V(\subset C[a,b])$ **에 대하여,**

$$\|f-g^*\| \le \|f-g\|,\ \forall\, g \in V$$

을 만족하는 $g^* \in V$ **를 찾아라.**

(예) 사다리꼴 공식도 함수공간의 특정 부분공간(예를 들어 1차함수들의 공간) V **안의 함수들 중에서 원래 함수와 제일 가까운 함수로 해석될 수 있다.**

보간법 (사이를 보충한다)

주어진 점들과 함수값들을 만족하는 근사 함수를 정하는 방법.

보간함수 of 데이터

주어진 데이터 $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, 1, \cdots, n\}$에 대하여 보간 조건

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 함수 P_n를 **보간함수**라고 한다. x_i들을 **마디점**이라고 한다.

보간함수가 다항함수인 경우 특히 **보간다항식**이라고 한다.

보간함수 of 함수

주어진 마디점들 $\{x_i \mid i = 0, 1, \cdots, n\}$과 함수 f에 대하여 보간 조건

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 함수 P_n을 **함수 f의 보간함수**라고 한다. 또는 함수 P_n은 **함수 f를 보간한다** 라고도 한다.

(예) 다항식

$$p(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

은 데이터 $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\}$ **의 보간다항식이다.**

[정리5.1] 마디점 $x_0,x_1,\cdots x_n$ **이 서로 다른 값이면, 보간 조건**

$$P_n(x_i)=y_i,\ i=0,1,\cdots,n$$

을 만족하는 n**차 이하의 다항식은 오직 하나 존재한다.**

(증명)

$i=0,1,\cdots,n$**에 대하여 정의된 함수**

$$\ell_i(x)\overset{\text{정의}}{=}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

는 $x_0,x_1,\cdots x_n$**들이 서로 다른 값이므로** $\ell_i(x_i)=1,\ \ell_i(x_j)=0,$ **for** $j\neq i$ **임을 알 수 있다.** ℓ_i**함수들은** n**차 다항식이므로 함수**

$$P_n(x) \overset{\text{정의}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x)$$

도 n차 이하 다항식이고,

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, \ell_i(x_k) = y_k, \quad \forall k = 0, 1, \cdots, n$$

임을 확인할 수 있다. 즉 보간다항식의 존재성이 증명되었다.
유일성을 증명하기 위하여 $Q_n(x)$가 n차 이하의 또 다른 보간다항식이라면, 다항식

$$R_n(x) \overset{\text{정의}}{=} P_n(x) - Q_n(x)$$

도 역시 n차 이하의 다항식이고, $\forall k = 0, 1, \cdots, n,$

$$R_n(x_k) = P_n(x_k) - Q_n(x_k) = y_k - y_k = 0,$$

이다. 대수학의 기본정리에 따르면, 영함수가 아닌 n차 이하의 다항식은 서로 다른 $n+1$개의 근을 가질 수 없으므로, $R_n(x) \equiv 0$이 되므로 유일성이 증명되었다. ■

라그랑지형 보간다항식

마디점들 $x_i,\ i=0,1,\cdots,n$에 대하여 각각 정의된 함수

$$\ell_i(x) \overset{정의}{=} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

를 라그랑지 다항식(Lagrange polynominal)이라 한다.

라그랑지 다항식 $\ell_i(x)$들의 일차결합으로 이루어진 보간다항식

$$P_n(x) \overset{정의}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i\,\ell_i(x)$$

를 라그랑지형 보간다항식이라고 한다.

[예제5.1] 마디점 $\{0,1,2\}$에서 함수 $f(x)=e^x-1$ 의 2차 라그랑지 보간다항식을 구하고, $f(1.5)$의 근사값을 구하라.

(풀이) (컴퓨터 숙제 : P202 #5(3) $f(0.25)$)

각 마디점에 대응하는 2차 라그랑지 다항식을 구하면

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)},\ \ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)},\ \ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}$$

이므로 2차 라그랑지 보간다항식은

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\,\ell_i(x) \\ &= f(0)\,\ell_0(x) + f(1)\,\ell_1(x) + f(2)\,\ell_2(x) \\ &= (e^0 - 1)\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + (e-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + (e^2-1)\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= 0 + (e-1)\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + (e^2-1)\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \end{aligned}$$

$f(1.5)$ **의 근사값은**

$$\begin{aligned} f(1.5) &\approx P_2(1.5) \\ &= (e-1)\frac{(1.5-0)(1.5-2)}{(1-0)(1-2)} + (e^2-1)\frac{(1.5-0)(1.5-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= (e-1)(1.5)(0.5) + (e^2-1)(1.5)(0.5)/2 \approx 3.6846 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

멱급수형 보간다항식

다항식의 가장 보편적인 형태는 다음과 같은 **멱급수형 보간다항식**이다.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

보간 조건

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 계수 a_i들을 구하려면, 연립방정식

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$V\mathbf{a} = \mathbf{y}$$

을 풀어야 한다. 행렬 V를 **Vandermonde 행렬**이라고 하는데, $x_0, x_1, \cdots x_n$들이 서로 다르면, 행렬 V는 역행렬이 존재하는 정칙행렬이 된다고 알려져 있다. 따라서 해가 존재하지만, 불량행렬이어서 정확한 해를 얻기가 어려운 점이 있다. 가장 효율적인 방법은 나중에 다루게 될 **뉴톤형 보간다항식**이다.

보간다항식 방식의 장단점

1) 라그랑지형 : 직관적. 수치미분과 수치적분에 유용.
점 하나를 추가하면 처음부터 다시 계산해야 하는 단점.

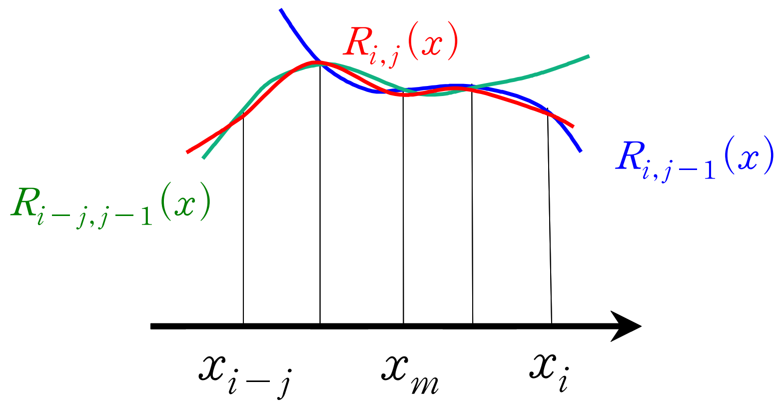
2) 뉴톤형 : 점 하나를 추가하면 처음부터 다시 계산할 필요없이 항 하나만 추가함.

Neville의 방법

보간다항식 전체를 구하지 않고, 한 점에서의 근사값만을 구하는 경우, 라그랑지 방법을 사용하되 처음부터 다시 계산하지 않고, 최근 계산값들을 이용하여 새 근사값을 계산하는 일종의 반복법이다. $0 \le j \le i$ 를 만족하는 자연수 i, j에 대하여 데이터 $\{(x_m, f(x_m)) \mid i-j \le m \le i\}$ 라그랑지 보간다항식을 $R_{i,j}(x)$ 이라고 하면,

$R_{i,0}(x_i) = f(x_i)$ 이고,

$$R_{i,j}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-j} - x_i} R_{i-1,j-1}(x) + \frac{x - x_{i-j}}{x_i - x_{i-j}} R_{i,j-1}(x)$$



임을 증명할 수 있다.

(증명)

1) $m = i - j$ **일 때,** $R_{i,j}(x_{i-j}) = R_{i-1,j-1}(x_{i-j}) = f(x_{i-j})$

2) $i - j < m < i$ **일 때,**

$$R_{i,j}(x_m) = \frac{x_m - x_i}{x_{i-j} - x_i} R_{i-1,j-1}(x_m) + \frac{x_m - x_{i-j}}{x_i - x_{i-j}} R_{i,j-1}(x_m)$$

$$= \frac{x_i - x_m}{x_i - x_{i-j}} f(x_m) + \frac{x_m - x_{i-j}}{x_i - x_{i-j}} f(x_m)$$

$$= f(x_m)$$

3) $m = i$ **일 때,** $R_{i,j}(x_i) = R_{i,j-1}(x_i) = f(x_i)$ ■

$R_{i,j}(x)$ **들은** $R_{i,j-1}(x)$ **들로부터 차수가 하나 올라간 다항식이고, 식을 정리하면,**

$$R_{i,j}(x) = \frac{(x - x_{i-j}) R_{i,j-1}(x) - (x - x_i) R_{i-1,j-1}(x)}{x_i - x_{i-j}}$$

이 된다.

$$\begin{array}{lllll} & \longrightarrow \text{차수증가} & & & \\ f(x_0) = R_{0,0} & & & & \\ f(x_1) = R_{1,0} & R_{1,1} & & & \text{마디점증가} \\ f(x_2) = R_{2,0} & R_{2,1} & R_{2,2} & & \downarrow \\ f(x_3) = R_{3,0} & R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \end{array}$$

[예제5.2]

마디점 $x_m = m+1,\ \forall m = 0,1,\cdots,k$ **에서 함수** $f(x) = 1/x$**의 보간다항식을** $P_k(x)$ **라고 하자. Neville 방법을 이용하여** $P_k(2.5),\ k = 0,1,2,3$ **을 구하라.**

(풀이) (컴퓨터 숙제: p203 #13)

$$R_{i,0}(2.5) = f(x_i) = \frac{1}{x_i} = \frac{1}{i+1} \qquad R_{0,0}(2.5) = \frac{1}{0+1} = 1.0 = P_0(2.5)$$

$$R_{1,1}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{1,0}(2.5)-(2.5-x_1)R_{0,0}(2.5)]/(x_1-x_0) = 0.25 = P_1(2.5)$$

$$R_{2,1}(2.5) = [(2.5-x_1)R_{2,0}(2.5)-(2.5-x_2)R_{1,0}(2.5)]/(x_2-x_1) = 0.41\dot{6}$$

$$R_{2,2}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{2,1}(2.5)-(2.5-x_2)R_{1,1}(2.5)]/(x_2-x_0) = 0.375 = P_2(2.5)$$

$$R_{3,1}(2.5) = [(2.5-x_2)R_{3,0}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,0}(2.5)]/(x_3-x_2) = 0.375$$

$$R_{3,2}(2.5) = [(2.5-x_1)R_{3,1}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,1}(2.5)]/(x_3-x_1) = 0.40625$$

$$R_{3,3}(2.5) = [(2.5-x_0)R_{3,2}(2.5)-(2.5-x_3)R_{2,2}(2.5)]/(x_3-x_0) = 0.390625 = P_3(2.5)$$

[정리5.2] $f \in C^{n+1}[a,b]$ **이고** $P_n(x)$**는 구간** $[a,b]$**에서 서로 다른 마디점** $x_0, x_1, \cdots, x_n$ **에서** f**의 보간다항식이라면,** $\forall x \in [a,b]$ **에 대하여,**

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} W(x), \quad W(x) \equiv \Pi_{i=0}^{n} (x - x_i) \quad \text{--- (1)}$$

을 만족하는 $\xi_x \in (a,b)$**가 존재한다.**

(증명)

(경우1) $(0 \le {}^{\exists} i \le n) : x = x_i$

$W(x) = 0$ **이고,** P_n**은** f**의 보간다항식이므로** $f(x_i) = P_n(x_i)$**이 되어 (1) 이 성립한다.**

(경우2) $(0 \le {}^{\forall} i \le n),\ x \ne x_i$

다음 함수 $g(t)$**를 정의하자.**

$$g(t) \overset{정의}{=} f(t) - P_n(t) - [f(x) - P_n(x)] \frac{W(t)}{W(x)} \quad \text{--- (2)}$$

$f, P_n \in C^{n+1}[a,b]$ **이므로** $g \in C^{n+1}[a,b]$ **이고,** $g(x_k) = 0, \forall k = 0, 1, \cdots, n$ **이고** $g(x) = 0$ **이므로** g**는 구간** $[a,b]$**에서 적어도** $n+2$ **개의 서로 다른 실근을 갖는다.**

따라서 Rolle의 정리에 의하여 도함수 g'는 구간 $[a,b]$에서 적어도 $n+1$ 개의 서로 다른 실근을 갖는다. $g \in C^{n+1}[a,b]$이므로 $g' \in C^n[a,b]$이다. 다시 Rolle의 정리에 의하여 도함수 $g^{(2)}$은 구간 $[a,b]$에서 적어도 n개의 서로 다른 실근을 갖는다. 이 과정을 반복하면, $g^{(2+(n-1))}$은 구간 $[a,b]$에서 적어도 $n-(n-1)$개의 서로 다른 실근을 갖는다. 즉 $g^{(n+1)}(\xi_x)=0$을 만족하는 ξ_x가 구간 (a,b)안에 적어도 하나 존재한다. 식 (2)로부터

$$g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-P_n^{(n+1)}(t)-[f(x)-P_n(x)]\frac{W^{(n+1)}(t)}{W(x)}$$

여기서 $P_n(t)$와 $W(t)$은 각각 n차와 $n+1$차 다항식이므로 $P_n^{(n+1)}(t)\equiv 0$이고 $W^{(n+1)}(t)=(n+1)!$ 이다. 그러므로 $t=\xi_x$를 대입하면,

$$g^{(n+1)}(\xi_x)=f^{(n+1)}(\xi_x)-[f(x)-P_n(x)]\frac{(n+1)!}{W(x)}$$

여기서 $g^{(n+1)}(\xi_x)=0$이므로,

$$f^{(n+1)}(\xi_x)-[f(x)-P_n(x)]\frac{(n+1)!}{W(x)}=0$$

이것을 정리하면 식(1)의 결론을 얻을 수 있다. ■

위 정리에 따르면 만약 $|f^{(n+1)}(\xi_x)| \le M$ **을 만족하는 상수** M **이 존재한다면, 오차의 한계는**

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|W(x)|, \quad W(x) \equiv \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

와 같이 구할 수 있다.

[예제5.3] 구간 $[0,1]$ **에 속하는 임의의 6개의 마디점에서 함수** $f(x) = \cos x + \sin x$ **의 보간다항식을** $P_5(x)$ **라 할 때, 오차** $|f(x) - P_5(x)|,\ x \in [0,1]$ **의 한계를 구하라.**

(풀이)

$f^{(6)}(x) = -\cos x - \sin x$ **(책오류수정) 참고 : Wolfram : 6th derivative of cos(x)+ sin(x)**

이므로 $|f(x) - P_5(x)| = \dfrac{|\cos\xi + \sin\xi|}{6!}\Pi_{k=0}^{5}|x - x_k|,\ \xi \in (0,1)$ **이다.**

여기서 $|\cos\xi + \sin\xi| = |\sqrt{2}\sin(\xi + \pi/4)| \le \sqrt{2}$ **,**

$\Pi_{k=0}^{5}|x - x_k| \le 1,\ (0 \le x, x_k \le 1)$

이므로 $|f(x) - P_5(x)| = \dfrac{\sqrt{2}}{6!} \approx 0.001964$ ■

뉴톤형 보간다항식

마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$에 대해, 아래 다항식을 함수 f의 뉴톤형 보간다항식이라 한다.

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) & \\ + a_2(x-x_0)(x-x_1) & \\ \cdots\cdots & \\ + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) & \quad \textbf{----(1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

뉴톤형 보간다항식에서는 마디점을 하나 추가할 경우, 기존데이터에 새로운 항 하나만 더 추가하여 계산하면 된다. 여기에서

$$f[x_0, x_1, \cdots x_k] \overset{\text{정의}}{=} a_k \qquad \textbf{---(2)}$$

를 함수 f의 분할차분(divided difference)라고 한다. 여기서 $f[x_0, x_1, \cdots x_n] \equiv a_n$ 는 $P_n(x)$의 최고차항 계수임을 알 수 있다. 일반적으로 마디점 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ $(0 \le i \le n-k)$들에 대하여 분할 차분을 $f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}]$로 표시한다.

[명제] 분할차분은 아래와 같이 순차적으로 구할 수 있다.

1) $f[x_i] = f(x_i),\ \ 0 \le {}^{\forall} i \le n$

2) $f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \dfrac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

(증명)

정의(2)에 의하여 $f[x_0] = a_0$ **이고, 식(1)로부터** $P_n(x_0) = a_0$ **이다. 그러므로 보간조건** $f(x_0) = P_n(x_0)$ **로부터,** $f[x_0] = f(x_0)$ **를 얻는다. 마디점** x_i **를 마디점** x_0 **라고 해도 같은 논리가 성립하므로**

$$f[x_i] = f(x_i),\ \ 0 \le {}^{\forall} i \le n$$

임을 알 수 있다. Neville 의 방법처럼, 데이터 $\{(x_m, f(x_m)) \mid 0 \le m \le k\}$ **에 대하여** $k-1$ **차 보간다항식**

$$P_{k-1}(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \cdots, k-1 \quad \text{---}\ \ \textbf{(1)}$$

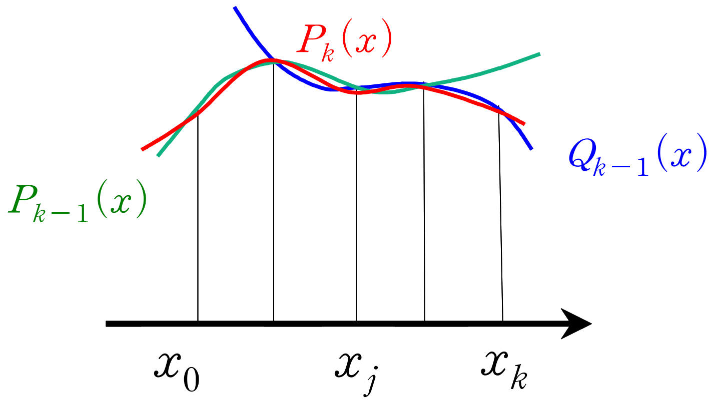
$$Q_{k-1}(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2,\ \cdots\ ,\ k \quad \text{---}\ \ \textbf{(2)}$$

으로부터 k **차 보간다항식**

$$P_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x) - \frac{x - x_k}{x_k - x_0} P_{k-1}(x) \quad \textbf{---(3)}$$

을 만들면

$$P_k(x) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \cdots, k$$



이 된다. 왜냐하면

i) $P_k(x_0) = (0)Q_{k-1}(x_0) - (-1)P_{k-1}(x_0)$

$= P_{k-1}(x_0) = f(x_0)$ **by (1)**

ii) $1 \le j \le k-1$ **에 대하여,**

$$P_k(x_j) = \frac{x_j - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x_j) - \frac{x_j - x_k}{x_k - x_0} P_{k-1}(x_j)$$

$$= \frac{x_j - x_0}{x_k - x_0} f(x_j) - \frac{x_j - x_k}{x_k - x_0} f(x_j) \quad \textbf{by (2)(1)}$$

$$= f(x_j)$$

iii) $P_k(x_k) = (1)Q_{k-1}(x_k) - (0)P_{k-1}(x_0)$

$= Q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$ **by (2)**

이기 때문이다. 한편 (3)으로부터, $P_k(x)$는 다음과 같다.

$$P_k(x) = \frac{1}{x_k - x_0}[(x-x_0)Q_{k-1}(x) - (x-x_k)P_{k-1}(x)]$$

따라서 $P_k(x)$의 최고차항의 계수 $f[x_0, x_1, \cdots, x_k]$은 다음 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{x_k - x_0}(Q_{k-1}\text{의 최고차항의 계수} - P_{k-1}\text{의 최고차항의 계수})$$

$$= \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad \blacksquare$$

[주의] 마디점 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ ($0 \le i \le n-k$)에 대하여도 같은 논리로,

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

로 쓸 수 있다.

분할차분표

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]^*$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]^*$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]^*$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_2,x_3,x_4]^*$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3,x_4]^*$			
x_4^*	$f[x_4]^*$				

[예제5.6] 함수 $f(x)=\sqrt{x}$ 의 함수표를 보간하는 뉴톤 분할차분형 다항식 $P_3(x)$ 를 구하라. 또한 $f(2.4)=1.549193$ 을 추가하여 $P_4(x)$ 를 구하고, $x=2.15$ 에서 각각 근사값을 구하여, 참값 $\sqrt{2.15}=1.46628782\cdots$ 와 비교하여라. **숙제 p215#1-(2)**

x	2.0	2.1	2.2	2.3
$f(x)$	1.414213	1.449137	1.483239	1.516575

(풀이) 주어진 값들에 대하여 분할차분표를 만들면 다음과 같다.

x_i	$f[x_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]^*$
2.0	1.414213	0.34924	−0.04110	0.00933	−0.00333*
2.1	1.449137	0.34102	−0.03830	0.00800*	
2.2	1.483239	0.33336	−0.03590*		
2.3	1.516575	0.32618*			
2.4*	1.549193*				

위에서 * 표시는 추가된 항목을 표시한다. 먼저 3**차 뉴톤 분할차분형 다항식을** $P_3(x)$**을 구하면**

$$\begin{aligned} P_3(x) = 1.414213 + 0.34924(x-2.0) \\ -0.04110(x-2.0)(x-2.1) \\ +0.00933(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2) \end{aligned}$$

$x = 2.15$**에의 근사값은** $f(2.15) \approx P_3(2.15) = 1.4662873$ **이다.**

한 점을 추가한 4차 뉴톤 분할차분형 다항식 $P_4(x)$은

$$P_4(x) = 1.414213 + 0.34924(x-2.0)$$
$$-0.04110(x-2.0)(x-2.1)$$
$$+0.00933(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2)$$
$$-0.00333(x-2.0)(x-2.1)(x-2.2)(x-2.3)$$

로 주어지고, $x=2.15$에의 근사값은 $f(2.15) \approx P_4(2.15) = 1.4662872$ 이다. ■

[정리5.3] 만약 $f \in C^n[a,b]$이고, 구간 $[a,b]$안의 마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$들 서로 다른 실수이면,

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

를 만족하면 ξ가 (a,b)안에 존재한다.

(증명)

마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$에서 함수 f의 보간다항식을 P_n이라고 하면 함수

$$g(x) \equiv f(x) - P_n(x)$$

는 보간 조건에 의하여 $n+1$개의 실근을 갖는다. 즉

$$g(x_0) = g(x_1) = \cdots = g(x_n) = 0$$

이다. Rolle 의 정리에 의하여 도함수 $g^{(1)}(x)$는 n개의 실근을 갖는다. 또 다시 $g^{(2)}(x)$는 $n-1$개의 실근을 갖고, 이 과정을 계속하여 $g^{(n)}(x)$는 1개의 실근을 갖는다. (참고 : $g^{(0)}$가 $n+1$개 이면 $g^{(n)}$는 1개) 따라서

$$g^{(n)}(\xi) = 0$$

을 만족하는 ξ가 (a,b)안에 존재한다. 즉

$$f^{(n)}(\xi) - P_n(\xi) = 0$$

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f[x_0,x_1,\cdots,x_n][(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + (n-1)\text{차식}]\right|_{x=\xi}$$

$$= \frac{d^n}{dx^n}\left(f[x_0,x_1,\cdots,x_n][x^n + (n-1)\text{차식}]\right|_{x=\xi}$$

$$= n!\, f[x_0,x_1,\cdots,x_n] \qquad \blacksquare$$

균등분할

마디점들이 일정한 간격으로 주어진 **균등분할**인 경우, 즉

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$0 \le {}^{\forall}k \le n,\ x_k = a + kh$$

분할차분은 좀 더 간단히 계산될 수 있다.

전향차분

자연수 j에 대하여 $f_j = f(x_j)$라 할 때, **전향차분**(forward difference)

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$$

$$\Delta^k f_j = \Delta(\Delta^{k-1} f_j),\ \forall k \ge 2$$

로 정의된다. ■

전향차분과 분할차분의 관계는 다음과 같다.

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f_0$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{\Delta f_1}{h}-\frac{\Delta f_0}{h}}{2h}=\frac{1}{2!\,h^2}\Delta^2 f_0$$

. . . .

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k f_0 \quad \text{---(1)}$$

분할점들이 더 일반적으로 $x_j, x_{j+1} \cdots, x_{j+n}$ **일 경우,**

$$f[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+k}]=\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_j$$

로 쓸 수 있다. 뉴톤형 보간다항식

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) \quad \text{---(2)}$$

에서 $x_i=x_0+ih$ **이고,** $x=x_0+sh$ **로 놓으면,**

$$\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)=\prod_{i=0}^{k-1}h(s-i)=h^k\prod_{i=0}^{k-1}(s-i)=h^k k!\binom{s}{k} \quad \textbf{---(3)}$$

이 된다. 여기에서 조합기호 $\binom{s}{k}$는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$\binom{s}{k}=\begin{cases}\dfrac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(s-i)\,, & k>0\\ 1, \quad k=0\end{cases}$$

뉴톤 전진차분형 보간다항식

식(1),(3)을 식(2)에 대입하면, 뉴톤 전진차분형 보간다항식

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!h^k}\Delta^k f_0\ h^k k!\binom{s}{k}=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k f_0\binom{s}{k}$$

을 얻는다.

전진차분표

보간다항식에 필요한 전진차분표는 분할차분표에서 있었던 나눗셈이 필요없다.

x_j	$\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_0	$f(x_0)$	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0^*$
x_1	$f(x_1)$	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1^*$	
x_2	$f(x_2)$	Δf_2	$\Delta^2 f_2^*$		
x_3	$f(x_3)$	$\Delta f_3{}^*$			
x_4^*	$f(x_4)^*$				

[예제5.7] 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 함수표를 보간하는 다항식 $P_3(x)$ 의 뉴톤 전진차분형을 구하고 $P_3(2.15)$ 를 계산하여 참값 $\sqrt{2.15} = 1.46628782\cdots$ 와 비교하여라.

(풀이) **숙제 p217#19-(1)**

$x = 2.15,\ x_0 = 2.0,\ s = 1.5,\ h = 0.1$ **이고 전진차분표는 다음과 같다.**

x_j	$\Delta^0 f$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
2.0	1.414213	0.034924	−0.000822	0.000056
2.1	1.449137	0.034102	−0.000766	
2.2	1.483239	0.033336		
2.3	1.516575			

따라서 뉴톤 전진차분형 다항식 $P_3(x) = P_3(x_0 + sh)$ **는**

$$P_3(x) = P_3(x_0 + sh)$$
$$= 1.414213 + 0.034924\binom{s}{1} - 0.000822\binom{s}{2} + 0.000056\binom{s}{3}$$

이고, $P_3(2.15)$ **를 계산하면 다음과 같이 주어진다.**

$$P_3(2.15) = P_3(2 + 1.5 \times 0.1)$$
$$= 1.414213 + 0.034924\binom{1.5}{1} - 0.000822\binom{1.5}{2} + 0.000056\binom{1.5}{3}$$
$$= 1.4662873 \qquad \blacksquare$$

후향차분

자연수 j에 대하여 $f_j = f(x_j)$라 할 때, **후향차분(backward difference)**

$$\nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

$$\nabla^k f_j = \nabla(\nabla^{k-1} f_j), \ \forall k \geq 2$$

로 정의된다. ■

뉴톤 후진차분형 보간다항식

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n$$ ■

Hermite 보간다항식

각 마디점에서, 함수값뿐만아니라 고계도함수값까지도 보간하는 다항식. 즉 함수 f와 서로 다른 마디점 $x_i (0 \leq i \leq n)$들과 자연수 $m_i (0 \leq i \leq n)$들이 주어졌을 때,

$$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \ (0 \leq j \leq m_i - 1, \ 0 \leq i \leq n) \quad \text{---(1)}$$

을 만족하는 $N(=m_0+m_1+\ \cdots\ +m_n-1)$차 이하의 다항식 $H(x)$를 **Hermite 보간다항식이라고 한다.**

[예제 5.9] 다음을 만족하는 3차 Hermite 보간 다항식 $H_3(x)$를 구하여라.

$$x_0 \neq x_1,\ H_3(x_j)=f(x_j),\ H_3'(x_j)=f'(x_j),\ j=0,1$$

(풀이1) $H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ **로 놓으면 위의 보간 조건은**

$$a_0+x_0a_1+x_0^2a_2+x_0^3a_3=f(x_0)$$

$$a_1+2x_0a_2+3x_0^2a_3=f'(x_0)$$

$$a_0+x_1a_1+x_1^2a_2+x_1^3a_3=f(x_1)$$

$$a_1+2x_1a_2+3x_1^2a_3=f'(x_1)$$

이다. 위 연립방정식을 행렬을 이용하여 $Ay=b$로 표시된다.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \end{bmatrix}$$

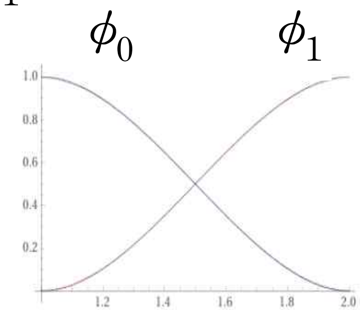
만약 $x_0 \neq x_1$ **이면 계수행렬** A **는 정칙임을 보일 수 있다.** A **가 정칙이면 방정식** $Ay=b$ **는 유일한 근을 구할 수 있다.**

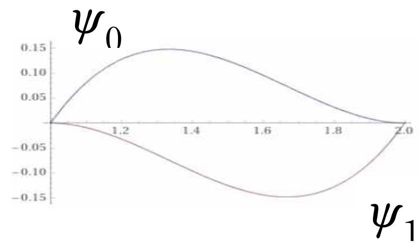
(풀이2 : 라그랑지형) 3 **차 보간다항식** $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ **들이**

$i=0,1,\ j=0,1$ **에 대하여,**

(함수값1) $\phi_i(x_j)=\delta_{ij},\ \phi_i'(x_j)=0$

(미분값1) $\psi_i(x_j)=0,\ \psi_i'(x_j)=\delta_{ij}$





을 만족하면 다음 3 **차 보간다항식** $H_3(x)$ **은 보간조건 (1)을 만족함을 알 수 있다.**

$$H_3(x)=f(x_0)\,\phi_0(x)+f(x_1)\,\phi_1(x)+f'(x_0)\,\psi_0(x)+f'(x_1)\,\psi_1(x)$$

이제 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ **를 구하자.** $\phi_0(x_1) = \phi_0{}'(x_1) = 0$ **이므로** x_1 **은** ϕ_0 **의 중근이므로**

$$\phi_0(x) = (cx + d)(x - x_1)^2$$

로 표시된다. 남은 두 조건

$$\phi_0(x_0) = (cx_0 + d)(x_0 - x_1)^2 = 1$$

$$\phi_0{}'(x_0) = c(x_0 - x_1)^2 + 2(c_0 x_0 + d)(x_0 - x_1) = 0$$

로부터 c **와** d **를 구할 수 있다. 나머지도 같은 방법으로 다음과 같이 구할 수 있다.**

$$\phi_0(x) = \frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^3}[2(x_0 - x) + (x_0 - x_1)]$$

$$\phi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^3}[2(x_1 - x) + (x_1 - x_0)]$$

$$\psi_0(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

■

라그랑지형 Hermite 보간다항식

예를 들어, 모든 자연수 $m_i = 2$ **인 경우, Hermite 보간 조건**

$$H_{2n+1}^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),\ j = 0, 1,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

을 만족하는 $2n+1$ **차 이하의 다항식** $H_{2n+1}(x)$ **을 구하려면,**

우선, 보간조건

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij},\ \phi_i'(x_j) = 0 \ \textbf{ for } \ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$$

$$\psi_i(x_j) = 0,\ \psi_i'(x_j) = \delta_{ij} \ \textbf{ for } \ 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le n$$

을 만족하는 기저함수들 ϕ_i, ψ_i **을 구하여**

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \phi_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\, \psi_i(x)$$

와 같이 기저함수들의 일차결합으로 구할 수 있다. 그런데 ϕ_i, ψ_i **들은**

$$\phi_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\ell_i'(x_i)]\, \ell_i^2(x)$$

$$\psi_i(x) = [x - x_i]\, \ell_i^2(x)$$

($\ell_i(x)$ **는 위에서 정의하였던 랑그랑지 다항식) 와 같이 구할 수 있다고 한다.**

[예제] (라그랑지 형) **(숙제) p228 #3(2)**

$f(x) = \sin x,\ x_0 = 0,\ x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ **인 경우에,**

$$f(x_0) = f'(x_1) = 0,\ f(x_1) = f'(x_0) = 1$$

3차 Hermite 보간 다항식은

$$H_3(x) = \phi_1(x) + \psi_0(x) = \frac{x^2}{(\pi/2)^3}[2(\frac{\pi}{2} - x) + \frac{\pi}{2}] + \frac{x(x-\pi/2)^2}{(\pi/2)^2}$$

이다. 그러므로 $f(\pi/6) = \sin(\pi/6) = 0.5$ **의 근사값은**

$$H_3(\pi/6) = \frac{(7+2\pi)}{27} = 0.49197 \qquad \blacksquare$$

뉴톤형 Hermite 보간다항식

중복이 허락된 마디점 $y_0 \le y_1 \le \ \cdots \ \le y_N$**에 대하여 뉴톤형 Hermite 보간다항식**

$$H(x) = \sum_{k-0}^{N} a_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - y_i)$$

의 계수 $a_k(0 \le k \le N)$는 유일하게 결정되는데, a_k를 **확장된 분할차분**이라 하고, 보통의 분할차분처럼

$$a_k = f[y_0, y_1, \cdots, y_k]$$

로 표시한다.

[예제 5.1] (뉴튼형 Hermite 보간다항식)

마디점 x_0, x_0, x_1에서 함수 f의 보간다항식

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_0)$$

이 보간조건

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0),\ p(x_1) = f(x_1)$$

을 만족하는 보간다항식이라면 a_0, a_1, a_2는 다음과 같이 주어진다.

$$a_0 \equiv f[x_0] = f(x_0)$$

$$a_1 \equiv f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

$$a_2 \equiv f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1] - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \blacksquare$$

[정리 5.6]

만약 $f \in C^m[a,b]$ **이고 구간** $[a,b]$ **위의 마디점** $y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_N$ **에서 중복된 점들이 모두** m **개 이하이면 함수** f **의 분할차분은 다음과 같이 주어진다.**

$$f[y_0, y_1, \cdots, y_k] = \begin{cases} \dfrac{f[y_1, y_2, \cdots, y_k] - f[y_0, y_1, \cdots, y_{k-1}]}{y_k - y_0} & y_0 \ne y_k \\ \dfrac{f^{(k)}(y_0)}{k!}, & y_0 = y_k \end{cases}$$

■

[예제5.12] 마디점 $0, \dfrac{\pi}{2}$ **에서 함수값과 도함수값을 이용하여 함수** $f(x) = \sin x$ **의 Hermite 보간다항식** $H_3(x)$ **를 분할차분을 이용하여 구하라.**

(풀이)

마디점을 중복하여 $y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = \dfrac{\pi}{2},\ y_3 = \dfrac{\pi}{2}$ **로 놓으면**

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = 1, f'(\frac{\pi}{2}) = 0$$

이므로

$$f[y_0,y_1]=f[0,0]=f'(0)=1$$

$$f[y_1,y_2]=f[0,\frac{\pi}{2}]=\frac{1-0}{\pi/2-0}=\frac{2}{\pi}$$

$$f[y_2,y_3]=f[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]=f'(\frac{\pi}{2})=0$$

$$f[y_{0,}y_1,y_2]=\frac{2/\pi-1}{\pi/2-0}=\frac{4}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}$$

$$f[y_{1,}y_2,y_3]=\frac{0-2/\pi}{\pi/2-0}=-\frac{4}{\pi^2}$$

$$f[y_{0,}y_{1,}y_2,y_3]=\frac{-4/\pi^2-(4/\pi^2-2/\pi)}{\pi/2-0}=\frac{4}{\pi^2}-\frac{16}{\pi^3}$$

이 되어

$$H_3(x)=x+\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{2}{\pi}\right)x^2+\left(\frac{4}{\pi^2}-\frac{16}{\pi^3}\right)x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

y_i	$f[y_i]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
0	0	1	$4/\pi^2 - 2/\pi$	$4/\pi^2 - 16/\pi^3$
0	0	$2/\pi$	$-4/\pi^2$	
$\pi/2$	1	0		
$\pi/2$	1			

■

[예제5.13] 다음 조건을 만족하는 Hermite 보간다항식을 분할차분표를 이용하여 구하라.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
1	2	3	
2	6	7	8

(풀이)

분할 차분표를 만들자

x	$f(x)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$	$f[,,,,]$
1	2	$f'(1)=3$	1	2	-1
1	2	$f[x_0,x_1]=4$	3	1	
2	6	$f'(2)=7$	$f''(2)/2!=4$		
2	6	$f'(2)=7$			
2	6				

그러므로 4차 Hermite 보간 다항식은

$$H_4(x)=2+3(x-1)+(x-1)^2+2(x-1)^2(x-2)-(x-1)^2(x-2)^2$$

이다 ■

(숙제) p229 #9 $H_4(x)$ 구하기

다항식은 계산하기 편한 함수이지만 차수가 높아지면 진동이 심하고 진동폭이 매우 크게 되어 오차를 줄이지 못한 경우가 있다. 이러한 단점을 해결하는 방법으로 조각다항식을 사용한다.

조각다항식(스플라인)

전체구간을 소구간으로 나누어 각 소구간에서 정의된 저차다항식들이 마디점에서 매끄럽게 연결되도록 조건을 주어 만든 함수를 **조각다항식(또는 스플라인(spline))**이라고 한다.

k차 스플라인

구간 $[a,b]$의 마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에 대하여, 함수 $S(x)$가 두 조건

(1) $S \in C^{(k-1)}[a,b]$

(2) $S(x)$는 각 소구간 $[x_{i-1},x_i]$에서 k차 이하의 다항식

을 만족하면 **k차 스플라인**이라 한다. 즉 이웃하는 소구간의 경계인 마디점에서 양쪽 다항식의 $(k-1)$계 도함수값이 일치하도록 연결한다.

스플라인 보간법

주어진 함수와 마디점에서 함수값이 일치하는 스플라인 함수를 찾아 보간한다.

[예제 5.14] 다음 함수 $S(x)$가 3차 스플라인이 되도록 a,b,c,d를 정하라.

$$S(x)=\begin{cases} x^3+1 & ,\ x\in[1,2] \\ a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d, & x\in[2,3] \end{cases}$$

(풀이) 각 구간의 함수를

$$S_1(x)=x^3+1$$

$$S_2(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$$

로 정의하면 도함수들이

$$S_1'(x)=3x^2,\ S_1''(x)=6x$$

$$S_2'(x)=3a(x-2)^2+2b(x-2)+c,\ S_2''(x)=6a(x-2)+2b$$

이 된다. 마디점 $x=2$에 3차 스플라인의 조건

$$S_1(2)=S_2(2)\ ,\ S_1'(2)=S_2'(2)\ ,\ S_1''(2)=S_2''(2)$$

을 적용하면

$$2^3+1=S_1(2)=S_2(2)=d$$

$$3\times 2^2=S_1'(2)=S_2'(2)=c$$

$$6\times 2=S_1''(2)=S_2''(2)=2b$$

을 얻는다. 그러므로 a는 임의의 수, $b=6,\ c=12,\ d=9$이다. ■

k차 스플라인 보간식

마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에 대하여, k차 스플라인 함수 $S(x)$를 각 소구간 $[x_i,x_{i+1}]$에 제한하여 만든 함수를 $S_i(x)$라 하고 또 $h_i=x_{i+1}-x_i$라 하자. 각 $S_i(x)$는 해당 소구간에서 k차 이하의 다항식이므로 계수는 $(k+1)$개인데, 소구간이 n개가 있으므로, k차 스플라인 함수 $S(x)$는 총 $n(k+1)$개의 미지수를 가지고 있다. 한편, $S(x)$는 $(n-1)$개의 내부 마디점 $x_1,x_2,\ \cdots\ ,x_{n-1}$에서 조건 $S\in C^{(k-1)}[a,b]$를 만족하므로, 다음 $k(n-1)$개의 조건

$$S_{i-1}^{(j)}(x_i)=S_i^{(j)}(x_i),0\le j\le k-1,\ 1\le i\le n-1$$

이 만족되어야 한다. 따라서 총 $n(k+1)-k(n-1)=n+k$개의 조건이 추가되면 $S(x)$는 유일하게 결정된다. 여기에 $k \ge 1$인 경우 $(n+1)$개의 보간 조건

$$S(x_i)=f(x_i),\ 0 \le i \le n$$

을 준다면, $(n+k)-(n+1)=(k-1)$개의 추가 조건을 줄 수 있다.

$k=1$**일 때**는 추가 조건 없이$(k-1=0)$ 1차 스플라인 $S(x)$이 결정 되며, $S(x)$는 전 구간에서 연속이고, 각 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서 두 점(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})을 지나는 직선은

$$S_i(x)=y_i+(x-x_i)\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$$

로 주어진다. 여기서 $y_i=f(x_i), 0 \le i \le n$이다.

$k=2$**일 때**는 추가 조건 $(k-1=1)$개이므로 구간의 양끝 중 한쪽만 조건을 주게 되어 비대칭적이고, 1차 도함수가 연속이므로 1차 스플라인보다 매끄럽지만, 2차 도함수가 불연속이므로 충분히 매끄럽지는 못하다.

$k=3$일 때는 추가 조건 $(k-1=2)$개를 추가하면 3차 스플라인 $S(x)$이 결정되는데 자연스럽게 매끈하다. 조건 2개 양 끝점에 하나씩 주는데, 아래 두 가지 방법이 주로 쓰인다. 4차 이상 스프라인이라도 장점이 없어, 보통 3차 스플라인이 많이 사용된다.

고정 3차 스플라인

2개의 추가 조건으로 고정 경계 조건

$$S'(x_0)=f'(x_0),\ S'(x_n)=f'(x_n)$$

을 준 3차 스플라인이다.

자연 3차 스플라인

2개의 추가 조건으로 자유 경계 조건

$$S''(x_0)=0,\ S''(x_n)=0$$

을 준 3차 스플라인이다.

자연 3차 스플라인의 존재성과 유일성

지금부터 $0 \le {}^{\forall}i \le n$ 에 대하여,

$$y_i \equiv f(x_i),\quad z_i \equiv S''(x_i),\ h_i \equiv x_{i+1} - x_i$$

로 놓자. 2계도함수$S''(x)$의 연속성을 사용하면 마디점 x_i에서

$$S''_{i-1}(x_i) = z_i = S''_i(x_i),\ 1 \le {}^{\forall}i \le n-1$$

가 된다. 여기에서 자유경계조건은

$$z_0 = 0,\ z_n = 0 \quad \text{--(1)}$$

으로 쓸 수 있다. 각 소구간 $[x_i, x_{i+1}], 0 \le i \le n-1$에서 스플라인 $S_i(x)$는 3차 다항식이므로 2계 도함수인 $S''_i(x)$은 두 점 $(x_i, z_i), (x_{i+1}, z_{i+1})$을 지나는 직선

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - x_i) + \frac{z_i}{h_i}(x_{i+1} - x)$$

로 주어진다. 이것을 두 번 적분하면 원래 함수 $S_i(x), 0 \le {}^{\forall}i \le n-1$를 얻는다.

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x)^3 + c_i(x - x_i) + d_i(x_{i+1} - x) \quad \text{-- (2)}$$

여기에서 $a_i = z_{i+1}/(6h_i), b_i = z_i/(6h_i)$ **이다.** c_i**와** d_i**를 정하기 위하여**

함수 $S(x)$**의 연속성과 보간조건**

$$\begin{cases} S_i(x_i \quad) = y_i \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases}, \quad 0 \le {}^{\forall} i \le n-1$$

을 사용하여 방정식 (2)를 풀면

$$c_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_{i+1}$$

$$d_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6} z_i$$

와 같이 c_i**와** d_i**를 구할 수 있다. (2)에서 도함수** $S'(x)$**의 연속성**

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad 1 \le {}^{\forall} i \le n-1$$

을 부과하면 $(n-1)$**개의 미지수** $z_1, z_2, \cdots \cdots z_{n-1}$**를 갖는 연립일차방정식**

$$h_{i-1} z_{i-1} + u_i z_i + h_i z_{i+1} = \beta_i, \quad 1 \le {}^{\forall} i \le n-1 \quad \textbf{--(3)}$$

을 얻는다. 여기서 $u_i = 2(h_{i-1} + h_i),\ \beta_i = \omega_i - \omega_{i-1},\ \omega_i = 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$ **이다.**

위 식을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

와 같이 z_i 들에 대한 연립일차방정식이 된다. 여기에서 h_i 는 양수이므로

$$|u_i| = 2(h_{i-1} + h_i) > \begin{cases} |h_1|, & i = 1 \\ |h_{1-1}| + |h_i|, & 2 \le i \le n-2 \\ |h_{n-2}|, & i = n-1 \end{cases}$$

이 성립한다. 그러므로 행렬의 대각성분의 절대값이 그 행의 나머지 성분들의 절대값의 합보다 크므로 강대각지배행렬이다. 강대각지배행렬은 정칙행렬임이 증명되어 있다. 그러므로 위 행렬 방정식은 유일한 해를 가진다. 따라서 자연 3차스플라인은 오직 하나만 존재한다고 결론지을 수 있다. ■

[예제5.15] 함수 $f(x)=((x/2+\sin x)\sin x+8)/2$ **를 마디점**

$$x_k = kh,\ 0 \le k \le 10,\ h = 4\pi/10$$

에서 보간하는 자연 3**차스프라인 그래프를 그려 보아라. (컴퓨터 숙제)** ■

주어진 함수를 보간하는 함수들 중에서 자연 3**차스플라인이 가장 매끄럽다.**
그 이유는 다음 정리에서 알 수 있다.

[정리5.7] 마디점 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ **에서 함수** $f\in C^2[a,b]$ **를 보간하는 임의의 함수** $g\in C^2[a,b]$ **에 대하여**

$$\int_a^b S''(x)^2 dx \le \int_a^b g''(x)^2 dx$$

이 성립한다. 여기서 $S(x)$ **는 마디점에서** f **를 보간하는 자연** 3**차 스플라인이다.**

(증명)

만약 $u(x) \overset{\text{정의}}{=} g(x) - S(x)$ **로 놓으면,** $g(x) = S(x) + u(x)$ **로부터**

$$g''(x)^2 = [S''(x) + u''(x)]^2$$

$$g''(x)^2 = S''(x)^2 + 2u''(x)S''(x) + u''(x)^2$$

$$\int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b S''(x)^2 dx + \int_a^b u''(x)^2 dx + 2\int_a^b S''(x)\,u''(x)\,dx \quad \textbf{--(1)}$$

각 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$**에서** $S(x)$**는** 3**차 다항식이므로** $S'''(x)$**는 상수**(예를들어, c_i) **이다. 자연 스플라인 조건** $S''(a) = 0,\ S''(b) = 0$ **을 이용하여,**

$$\begin{aligned}\int_a^b S''(x)\,u''(x)\,dx &= [S''(x)u'(x)]_a^b - \int_a^b S'''(x)u'(x)dx \\ &= [0-0] - \int_a^b c_i\,u'(x)\,dx \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\,dx \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,[u(x_{i+1}) - u(x_i)] = 0\end{aligned}$$

그러므로 (1)에서

$$\int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b S''(x)^2 dx + \int_a^b u''(x)^2 dx$$

따라서

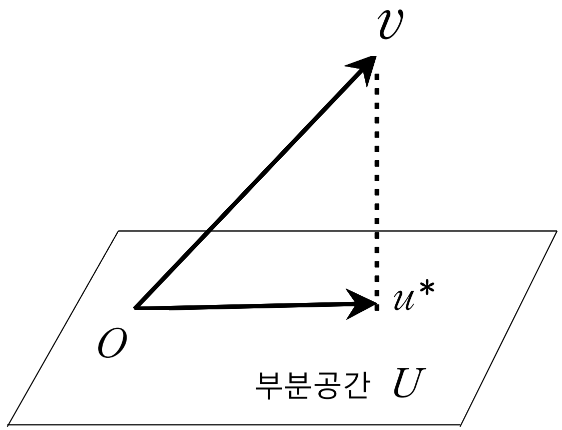
$$\int_a^b S''(x)^2 dx \le \int_a^b g''(x)^2 dx \qquad \blacksquare$$

(주의) 곡선 $y = f(x)$ **의 곡률은**

$$\frac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{3/2}}$$

이므로 자연 3 **차 스플라인은 다른 어떤 곡선보다 진동이 심하지 않다는 사실을 보여준다.**

보간법은 주어진 마디점에서 함수값(또는 고계도함수)을 만족하는 쉬운함수(다항식)을 찾는 문제이지만, 함수를 근사하는 다른 방법으로 최적근사문제가 있다.



최적근사문제

벡터(함수) 공간 V 안의 벡터 v 와 부분공간 U 에 대하여,

$$\|v-u^*\| \le \|v-u\|, \ {}^{\forall}u \in U$$

을 만족하는 최적근사벡터 $u^* \in U$ 을 찾아라.

주목 부분공간 U 가 유한차원일 때는 u^* 가 항상 존재한다. 일반적으로 u^* 를 찾는 일은 어렵지만, 내적이 정의된 벡터공간에서는 최적근사문제가 선형연립방정식의 근을 구하는 문제로 귀착된다. 부분공간의 기저를 잘 선택하면 선형연립방정식의 계수행렬이 근을 쉽게 구할 수 있는 특별한 형태로 만들 수 있다.

최소제곱 근사문제(연속형 함수문제)

내적공간인 함수공간 $C[a,b]$ **에서 내적과 노름이**

$$\textbf{내적 : } <f,g>=\int_a^b f(x)\,g(x)dx$$

$$\textbf{노름 : } \|f\|=<f,f>^{1/2}=\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

로 주어질 때, f **와 부분공간** U**에 대하여,**

$$\|f-g^*\| \le \|f-g\|,\ {}^\forall g\in U$$

을 만족하는 $g^*\in U$**을 찾아라. 여기에서** g^* **를 최소제곱 근사함수라고 한다.**

벡터의 직교

두 벡터 u,v**는 직교한다.** $\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow}$ $<u,v>=0$

(예) 함수 $x,\ x^2$ **는 공간** $C[-1,1]$ **에서 직교한다.**

왜냐하면 $<x,x^2>\ =\int_{-1}^{1}(x)\,(x^2)\,dx=0$ **이기 때문이다.**

직교집합

벡터들의 집합 $< u_1, u_2, \cdots, u_n >$ 는 직교집합이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad < u_i, v_j > = 0 \ , \ {}^{\forall} i \neq {}^{\forall} j$$

정규직교집합

벡터들의 집합 $< u_1, u_2, \cdots, u_n >$ 는 정규직교집합이다.

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad < u_i, v_j > = \delta_{ij} \ , \ {}^{\forall} i, {}^{\forall} j$$

벡터와 집합의 수직

벡터 v 와 집합 W 은 직교한다. ($v \perp W$)

$$\overset{\text{정의}}{\Leftrightarrow} \quad < v, w > = 0, \ {}^{\forall} w \in W$$

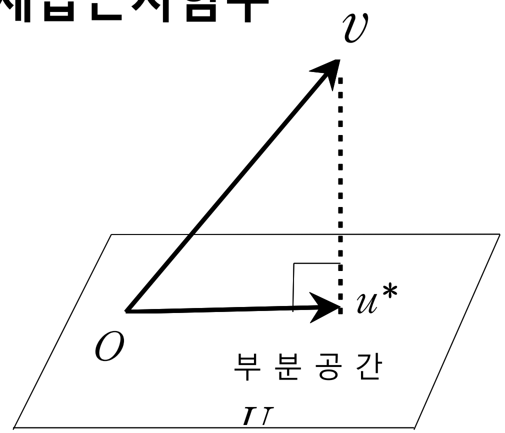
[정리5.9] (연속형,이산형 공통)

U가 내적공간 V의 부분공간이고 $v \in V$일 때,

$$(\ u^* \in U\text{가 } v\text{의 최소제곱근사함수 }) \Leftrightarrow v - u^* \perp U$$

$(\Longrightarrow)$

임의의 $u \in U$ 에 대하여, $u^* + u \in U$ 이므로, u^* 가 v의 최소제곱근사함수 이면,



$$\|v - u^*\|^2 \le \|v - (u^* + u)\|^2 \quad \text{--(1)}$$

이 성립한다. 여기에서

$$\begin{aligned} \|v - (u^* + u)\|^2 &= \|(v - u^*) - u\|^2 \\ &= \ <(v - u^*) - u,\ (v - u^*) - u> \\ &= \|v - u^*\|^2 - 2 <v - u^*, u> + \|u\|^2 \quad \text{--(2)} \end{aligned}$$

이므로 by (1),(2),

$$2 <v - u^*, u> \le \|u\|^2$$

를 얻는다. 임의의 실수 r에 대하여 $ru \in U$이므로, u대신 ru를 대입하면,

$$2r < v-u^*, u > \leq r^2\|u\|^2$$

$$2 < v-u^*, u > \leq r\|u\|^2$$

이다. 여기에서 $r \to 0$이면 $< v-u^*, u > = 0$, 즉 $v-u^* \perp U$ 이다.

($\Leftarrow$)

임의의 $u \in U$에 대하여, $u-u^* \in U$이므로,

$$v-u^* \perp u-u^*$$

$$< v-u^*, u-u^* > = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} \|v-u\|^2 &= \|(v-u^*)-(u-u^*)\|^2 \\ &= \|v-u^*\|^2 - 2 < v-u^*, u-u^* > + \|u-u^*\|^2 \\ &= \|v-u^*\|^2 + \|u-u^*\|^2 \\ &\geq \|v-u^*\|^2 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

정규방정식(연속형)

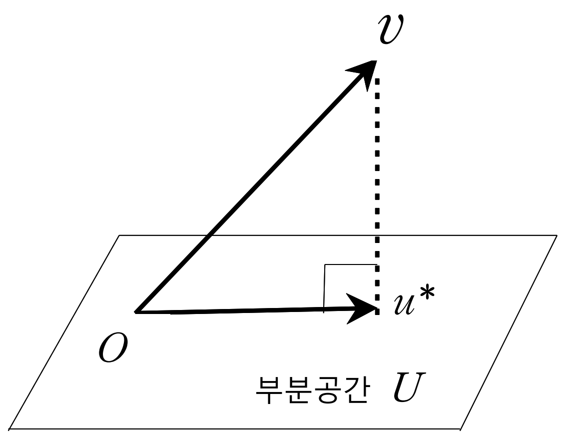
U가 내적공간 V의 부분공간이고 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$를 기저로 갖는 경우, 어떤 $v \in V$ 의 U안에 있는 최적 근사함수 $u^* \in U$를

$$u^* = \Sigma_{j=1}^{n} a_j u_j$$

로 놓자. 그러면 미지수 a_j들을 구하기 위하여 [정리5.9]의 결과를 이용하자.

$$v - u^* \perp U \iff \langle v - u^*, u_i \rangle = 0, \ ^{\forall} i = 1, 2, \cdots, n$$

여기에서 $^{\forall} i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여



$$\langle v - u^*, u_i \rangle = 0$$

$$\iff \langle u^*, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

$$\iff \langle \Sigma_{j=1}^{n} a_j u_j, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

$$\iff \Sigma_{j=1}^{n} a_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle v, u_i \rangle$$

$$\iff \Sigma_{j=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle a_j = \langle v, u_i \rangle$$ 이다.

a_j 들에 관한 선형연립방정식

$$\Sigma_{j=1}^{n} < u_i, u_j > a_j = < v, u_i >, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

은

$$Aa = b$$

로 놓을 수 있는데, 이것을 정규방정식(연속형)이라고 한다. 단

$$A = [< u_i, u_j >]_{n \times n}$$
$$a = [a_j]_{n \times 1}$$
$$b = [< v, u_j >]_{n \times 1}$$

이다. 행렬 A 는 대칭이고 정칙임을 보일 수 있다. 따라서 정규방정식은 유일한 해를 갖는다. 따라서 근사함수 u^* 를 유일하게 결정할 수 있다.

[정리 5.10] U 가 내적공간 V 의 부분공간이고 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 를 정규직교기저로 갖는 경우, 어떤 $v \in V$ 의 U 안에 있는 최적 근사함수 $u^* \in U$ 는

$$u^* = \Sigma_{i=1}^{n} < v, u_i > u_i$$

와 같이 얻을 수 있다.

(증명)

$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 들 정규직교기저이면 $< u_i, u_j > = \delta_{ij}$ 이므로

$$A = [< u_i, u_j >]_{n \times n} = I_{n \times n}$$

가 되므로 정규방정식은 $Aa = b$ 의 해 $a = [a_j]$ 는 $a = b$ 로 주어진다. ■

[예제 5.17] 구간 $[-1, 1]$에 정의된 함수 $f(x) = \sin x$ 의 3차다항함수들의 공간 Π_3 내의 최소제곱함수 $p \in \Pi_3$ 을 구하여라. 내적은

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

을 사용하라.

(풀이 1)

$B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ 를 Π_3 의 기저로 사용하면 p 를

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 = \Sigma_{i=0}^{3} c_i x^i$$

와 같이 표시할 수 있다. p 가 f 에 가장 가까우면, $(p - f) \perp \Pi_3$ 이다. 즉

$\forall\, i = 0,1,2,3,$

$$< p - f, x^i > = 0$$

$$< \Sigma_{j=0}^{3} c_j x^j - f,\ x^i > = 0$$

$$\Sigma_{j=0}^{3} < x^j, x^i > c_j = < f,\ x^i >$$

그러므로 정규방정식은

$$\Sigma_{j=0}^{3}\ < x^j,\ x^i > c_j = < \sin x\,,\, x^i >,\ i = 0,1,2,,3$$

이다. 각 내적들을 계산하여 연립선형방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\sin 1 - \cos 1) \\ 0 \\ -6\sin 1 + 10\cos 1 \end{bmatrix}$$

이 방정식을 풀면 $p(x)$의 계수들

$$c_0 = 0,\ c_1 = 195/2\sin 1 - 150\cos 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = -315/2\sin 1 + 245\cos 1$$

로 구하여 근사해 $p(x)$를 얻는다.

$$p(x) = (195/2\sin 1 - 150\cos 1)x + (-315/2\sin 1 + 245\cos 1)x^3 \qquad ■$$

(풀이 2) 정규직교기저

$$B_2 = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$
$$= \{1/\sqrt{2},\ \sqrt{3/2}\,x,\ \sqrt{45/8}\,(x^2 - 1/3),\ \sqrt{175/8}\,(x^3 - 3/5\,x)\}$$

를 Π_3 **의 기저로 사용하면 [정리5.10] 에 따라** $p(x)$**는**

$$p(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x)$$
$$b_i = < \sin x,\ p_i(x) >, i = 0, 1, 2, 3$$

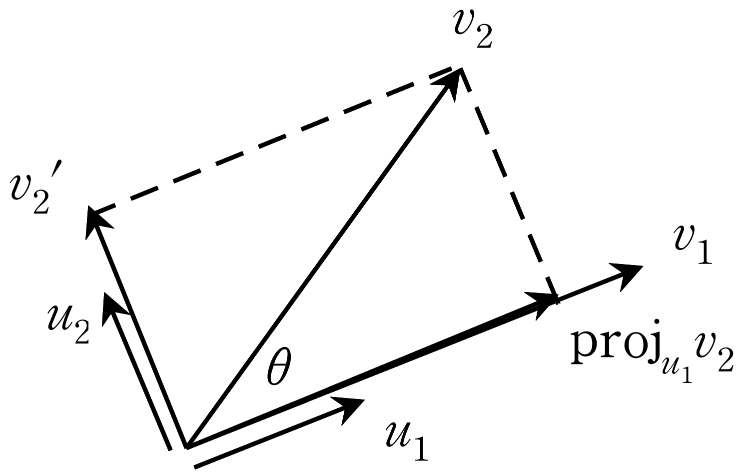
로 주어진다. b_i **들을 계산하면 다음과 같다.**

$$b_0 = 0,\ b_1 = \sqrt{6}\,(\sin 1 - \cos 1),$$
$$b_2 = 0,\ b_3 = \sqrt{14}\,(-9\sin 1 + 14\cos 1)$$

그리하여 근사함수 $p(x)$ **는 다음과 같이 주어진다.**

$$p(x) = \sqrt{6}\,(\sin 1 - \cos 1)\sqrt{3/2}\,x$$
$$+ \sqrt{14}\,(-9\sin 1 + 14\cos 1)\sqrt{175/8}\,(x^3 - 3/5\,x) \qquad \blacksquare$$

정규직교기저(그램-슈미트 과정)



$$\mathrm{proj}_{u_1}v_2 = (\|v_2\|\cos\theta)\,u_1 = (\|v_2\|\,\|u_1\|\cos\theta)u_1 = < v_2, u_1 > u_1$$

$$v_1{}' = v_1,\ u_1 = \frac{v_1{}'}{\|v_1{}'\|}$$

$$v_2{}' = v_2 - < v_2, u_1 > u_1,\quad u_2 = \frac{v_2{}'}{\|v_2{}'\|}$$

$$v_3{}' = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2\quad,\quad u_3 = \frac{v_3{}'}{\|v_3{}'\|}$$

. . . .

[예제5.18] 기저 $B_1 = \left\{1, x, x^2\right\}$ 를 정규직교화 하라.

(풀이)

$$v_1{}' = v_1 = 1$$

$$\|v_1{}'\| = \left(\int_{-1}^{1}(1)(1)dx\right)^{1/2} = \sqrt{2}\ ,\ u_1 = \frac{v_1{}'}{\|v_1{}'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2{}' = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = x - \left(\int_{-1}^{1} x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x$$

$$\|v_2{}'\| = \left(\int_{-1}^{1} x\, x\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ u_2 = \frac{v_2{}'}{\|v_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$$

$$v_3{}' = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2$$

$$= x^2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\int_{-1}^{1} x^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)dx\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\|v_3{}'\| = \left(\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{8}{45}},\ u_3 = \frac{v_3{}'}{\|v_{3\|}} = \frac{(x^2 - 1/3)}{\sqrt{8/45}} = \sqrt{\frac{45}{8}}\,(x^2 - \frac{1}{3}) \quad \blacksquare$$

자료맞추기 (예:이산형 최소제곱법)

함수 $f(x)$를 모르고 관측을 통하여 얻은 $f(x_i)$들의 근사값 $y_i(1 \le i \le m)$만 주어졌을 때 적당한 의미에서 x와 y의 관계를 가장 잘 나타내는 근사함수 $g(x)$를 찾아내는 것을 **자료맞추기**라고 한다.

이 경우 함수 $g(x)$는 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$를 정확히 만족하지 않고, $g(x)$의 유형은 관측이나 경험에 의한 직관에 의하여 주어진다. 보간법에서는 변수들의 개수와 자료(또는 조건)들의 개수가 동일한 것에 비하여, 자료맞추기에서는 $g(x)$를 결정하기 위하여 찾는 변수들의 개수보다 자료의 개수가 일반적으로 훨씬 많다. 즉 자료맞추기 문제는 **과정보체계**이다.

이산형 최소제곱 문제

어떤 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$와 일차독립인 어떤 함수들 $\{\phi_j \mid 1 \le j \le n\}$이 주어졌을 때 $(m \ge n)$, ${}^\forall g(x) = z_1\phi_1(x) + \cdots + z_n\phi_n(x)$에 대하여

$$\Sigma_{i=1}^{m} |g^*(x_i) - y_i|^2 \le \Sigma_{i=1}^{m} |g(x_i) - y_i|^2$$

을 만족하는 함수 $g^*(x) = z_1{}^* \phi_1(x) + \cdots + z_n{}^* \phi_n(x)$ **를 구하는 것을 (이산형) 최소제곱 문제라 하고, 함수** $g^*(x)$ **를 (이산형) 최소제곱 함수라고 한다.**

이 문제는 오차(error)함수

$$E(z) \overset{\text{정의}}{=} \Sigma_{i=1}^{m} [z_1\phi_1(x_i) + \cdots + z_n\phi_n(x_i) - y_i]^2$$

의 최소값을 구하는 문제로 볼 수 있고, $E(z)$ **의 최소값을 구하기 위하여는 미분이** 0 **이 되는 사실을 이용한다. 즉** $\nabla E(z) = 0$ **을 다시 쓰면**

$$\frac{\partial E}{\partial z_k} = 0, \ \ 1 \le {}^\forall k \le n$$

이다. 그러므로 $1 \le {}^\forall k \le n$ **에 대하여,**

$$\Sigma_{i=1}^{m} 2[z_1\phi_1(x_i) + \cdots + z_n\phi_n(x_i) - y_i]\phi_k(x_i) = \frac{\partial E}{\partial z_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{m} \left[\Sigma_{j=1}^{n} \phi_j(x_i)\ z_j - y_i\right] \phi_k(x_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{m} \phi_k(x_i) \left[\Sigma_{j=1}^{n} \phi_j(x_i)\ z_j\right] = \Sigma_{i=1}^{m} \phi_k(x_i)\, y_i$$

여기서 $a_{ij} = \phi_j(x_i)$ **로 놓고, 위 방정식을 다시 쓰면**

$$\Sigma_{i=1}^{m} a_{ik} \left[\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}\ z_j \right] = \Sigma_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ ,\ 1 \le {}^{\forall}k \le n$$

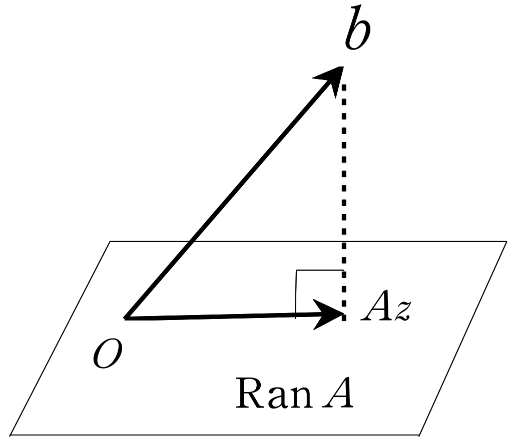
이 되고, 이 선형방정식을 정규방정식(이산형) 이라 한다.

$$A^T A z = A^T b \quad \textbf{--(1)}$$

여기서

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\quad b = [y_i]_{m \times 1}$$

이산 최소제곱 문제 (벡터적 접근)



일차독립인 어떤 함수들 $\{\phi_i \mid 1 \le i \le n\}$ **이 주어졌을 때, 함수**

$$g(x) = z_1\phi_1(x) + \cdots + z_n\phi_n(x)$$

가 만약 자료 $\{(x_i, y_i) \mid 1 \le i \le m\}$ **들을 모두 만족한다면,**

$$z_1\phi_1(x_i) + \cdots + z_n\phi_n(x_i) = y_i,\ 1 \le {}^{\forall}i \le m$$

이 성립해야 하고, 이것은 선형연립방정식

$$Az = b$$

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}\ ,\ \ a_{ij} = \phi_j(x_i)$$

$$b = [y_i]_{m \times 1}$$

로 표시할 수 있다. $m \geq n$ 이면 일반적으로는 해가 존재하지 않는다, 즉,

$$b \notin \mathrm{Ran}\, A$$

이다. $\mathrm{Ran}\, A$ 에서 b 에 가장 가까운 벡터 Az 를 찾으면, by [정리5.9] , 그것은

$$(b - Az) \perp \mathrm{Ran}\, A$$

일 때 성립한다. 즉 $(b - Az)$ 가 A 의 모든 열벡터와 수직이다. 즉,

$$A_1^T(b - Az) = 0,\ A_2^T(b - Az) = 0, \cdots,\ A_n^T(b - Az) = 0$$

그러므로

$$A^T(b - Az) = 0$$

이 성립하고 이것은

$$A^TAz = A^Tb$$

라고 하는 정규방정식이 된다.

[예제 5.22] 다음 표의 최소제곱 일차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ 을 구하라.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0.17	1.42	1.56	2.74	4.45	4.59	6.12	6.62	8.30	9.31

(풀이)

위 점들을 지나는 가장 적합한 1차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ **을 구하려면 오차(error) 함수**

$$E(z_1, z_2) = \Sigma_{i=1}^{10}[z_1 + z_2 x_i - y_i]^2$$

을 최소화하는 z_1, z_2 **를 구해야 한다. 그러므로**

$$\frac{\partial E}{\partial z_1} = 0, \frac{\partial E}{\partial z_2} = 0$$

이 되는 z_1, z_2 **를 구하자.**

$$\Sigma_{i=1}^{10} 2[z_1 + z_2 x_i - y_i] = \frac{\partial E}{\partial z_1} = 0$$

$$\Sigma_{i=1}^{10} 2x_i[z_1 + z_2 x_i - y_i] = \frac{\partial E}{\partial z_2} = 0$$

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{10}[z_1 + z_2 x_i - y_i] = 0 \\ \Sigma_{i=1}^{10} x[z_1 + z_2 x_i - y_i] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma_{i=1}^{10}[\quad z_1 + x_i\ z_2] = \Sigma_{i=1}^{10}\ y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}[x_i z_1 + x_i^2 z_2] = \Sigma_{i=1}^{10} x_i y_i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} 1 & \Sigma_{i=1}^{10} x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i & \Sigma_{i=1}^{10} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10}\ y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}\ x_i\ y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$A^T A z = A^T y$$

여기에서

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{10} \end{bmatrix},\ y^T = [y_1, y_2, \cdots, y_{10}]$$

한편, 벡터적 접근으로 한다면 1차식 $p(x) = z_1 + z_2 x$ **이 마디점들** $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, 10$ **을 만족한다면,**

$$z_1 + z_2 x_i = y_i,\ i = 1, 2, \cdots, 10$$

이어야 한다. 이것을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$Az = y$$

이 된다. 이것은 해가 존재하지 않지만, 정규방정식 $A^T Az = A^T y$ **은 근사해를 제공한다. 정규방정식의 좌변 행렬은**

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & \Sigma_{i=1}^{10} x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i & \Sigma_{i=1}^{10} x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 55 \\ 55 & 385 \end{bmatrix}$$

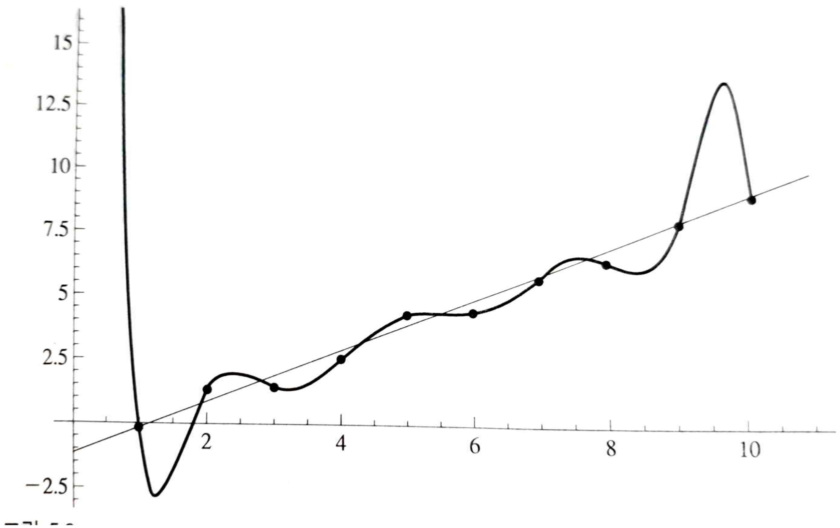
이고 우변 상수벡터는

$$A^T y = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} a_{i1} y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i2} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} 1 \times y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.94 \\ 331.7 \end{bmatrix}$$

이다. 정규방정식 $A^T Az = A^T y$ 를 풀면

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.14133 \\ 1.02461 \end{bmatrix}$$

최소제곱 일차식은 $F(x) = -1.14133 + 1.02461x$ 이다. ■



[예제 5.23] 다음 데이터의 최소제곱근사식을

$$p(x) = z_1 e^x + z_2 \ln x + z_3 \sin x$$

로 구하여라.

x_i	0.24	0.61	0.96	1.32	1.71	2.04	2.39	2.80	3.01	3.38
y_i	1.48	-0.04	-0.51	-1.14	-1.72	-1.71	-1.64	-1.03	-0.65	0.63

(풀이)

기저함수들을 $\phi_1(x) = e^x$, $\phi_2(x) = \ln x$, $\phi_3(x) = \sin x$ **로 놓으면**

$$p(x) = z_1 \phi_1(x) + z_2 \phi_2(x) + z_3 \phi_3(x)$$

이 되고, $y = p(x)$ **가 위 점들을 만족한다면**

$$z_1 \phi_1(x_i) + z_2 \phi_2(x_i) + z_3 \phi_3(x_i) = y_i, \ i = 1, 2, \cdots, 10$$

이어야 한다. 이것을 행렬 형태로 쓰면

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(x_{10}) & \phi_2(x_{10}) & \phi_3(x_{10}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e^{x_1} & \ln x_1 & \sin x_1 \\ e^{x_2} & \ln x_2 & \sin x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{x_{10}} & \ln x_{10} & \sin x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$Az = y$$

이 된다. 이것은 해가 존재하지 않지만, 정규방정식 $A^TAz = A^Ty$ **은 근사해를 제공한다. 정규방정식의 좌변 행렬은**

$$A^TA = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10}(e^{x_i})^2 & \Sigma_{i=1}^{10} e^{x_i}\ln x_i & \Sigma_{i=1}^{10} e^{x_i}\sin x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}(\ln x_i)e^{x_i} & \Sigma_{i=1}^{10}(\ln x_i)^2 & \Sigma_{i=1}^{10}\ln x_i \sin x_i \\ \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)e^{x_i} & \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)\ln x_i & \Sigma_{i=1}^{10}(\sin x_i)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1779.3 & 91.224 & 28.1437 \\ 91.224 & 7.67262 & 1.57713 \\ 28.1437 & 1.57713 & 4.42187 \end{bmatrix}$$

우변 상수벡터는

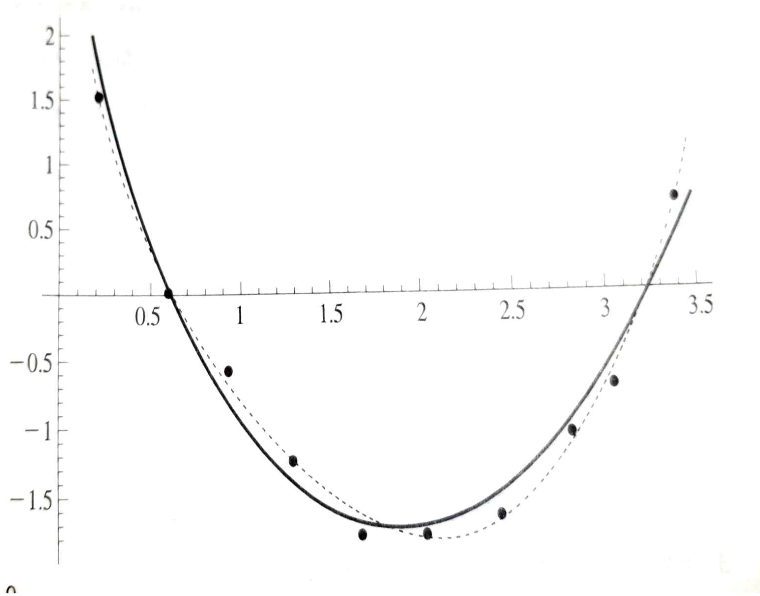
$$A^Ty = \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^{10} a_{i1}y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i2}y_i \\ \Sigma_{i=1}^{10} a_{i3}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55.6917 \\ -6.96838 \\ -1.27225 \end{bmatrix}$$

로 주어진다. 정규방정식 $A^TAz = A^Ty$ **를 풀어** z **를 구하면**

$$z^T = [0.0558935,\ -1.31225,\ -1.27225]$$

이므로 최소제곱근사 함수(점선 그래프) 는 다음과 같다.

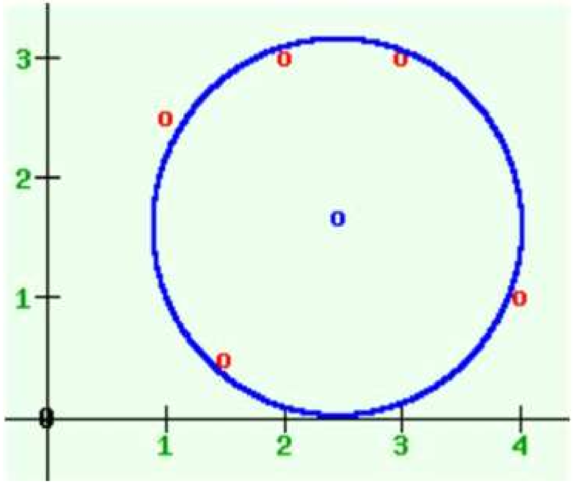
$$g(x) = 0.056\, e^{x} - (1.3)\ln x - (1.3)\sin x \qquad \blacksquare$$



(참고로 실선 그래프는 최소제곱 5차다항함수)

[특별 예제] 다음 데이터에 대한 최적함수 $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$**을 구하라.**

x_i	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
y_i	2.5	0.5	3.0	3.0	1.0



(풀이)

최적의 c_1, c_2, r **을 구하기 위하여 원의 방정식을 다음과 같이 선형방정식으로 변형한다.**

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$

$$2xc_1+2yc_2+r^2-c_1^2-c_2^2=x^2+y^2$$

여기서 $c_3=r^2-c_1^2-c_2^2$ **로 놓으면,** c_1, c_2, c_3 **에 대하여 선형인 방정식**

$$(2x)c_1+(2y)c_2+(1)\,c_3=(x^2+y^2)$$

을 얻는다. 이 방정식이 표에서 주어진 점들을 만족하다면 다음 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.25 \\ 2.5 \\ 13.0 \\ 18.0 \\ 17.0 \end{bmatrix}$$

위 방정식에 대응하는 정규방정식

$$\begin{bmatrix} 129 & 89 & 23 \\ 89 & 102 & 20 \\ 23 & 20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 318.00 \\ 258.75 \\ 57.75 \end{bmatrix}$$

을 풀면 계수 c_1, c_2, c_3 **을 구하고**

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.46 \\ 1.60 \\ -6.17 \end{bmatrix}$$

최적의 원의 방정식은

$$(x-2.46)^2 + (y-1.6)^2 = c_1^2 + c_2^2 - c_3 = 2.46^2 + 1.6^2 - 6.17$$

$$(x-2.46)^2 + (y-1.6)^2 = (1.56)^2 \qquad \blacksquare$$

제6장 수치미분과 수치적분

수치미분식

수치미분은 미분방정식을 수치적으로 푸는데 중요한 역할을 한다. 함수 $f(x)$의 1계도함수에 대한 수치미분은

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

로써 $f'(x)$의 근사값을 구할 수 있다. $h>0$일 때 **전향수치미분식**(forward difference formula), $h<0$일 때 **후향수치미분식**(backward difference formula) 라고 한다.

수치미분식의 오차

테일러의 정리를 사용하면

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{1}{2}h^2 f''(\zeta), \quad ^{\exists}\zeta \in (x, x+h)$$

을 얻고 이것을 정리하면

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{1}{2}hf''(\zeta), \quad {}^{\exists}\zeta \in (x, x+h)$$

여기에서 $-hf''(\zeta)$ 를 **절단오차**(truncation error)라 하고,

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h)$$

로 표시한다. $O(h)$ 는 h 와 0 으로 가는 속도가 같다는 의미이다.

중앙수치미분식

절단오차가 더 정확한 $O(h^2)$ 인 수치미분 공식을 유도해 보자. 테일러 급수로부터

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{3!}h^3 f^{(3)}(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \cdots$$

를 얻고, 첫식에서 두 번째 식을 빼면, 홀수항만 남아,

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{2}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{2}{5!}h^5f^{(5)}(x)+\cdots$$

을 얻는다. 여기에서 $f'(x)$ **에 대하여 풀면**

$$f'(x) = \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) - \cdots \qquad \textbf{---(1)}$$

$$= \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

이 된다. 그리하여 $f'(x)$ **의 근사값을 구하는 중앙수치미분식(central difference formula)**

$$f'(x) \approx \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

을 얻는다.

Richardson의 외삽법

절단오차가 더 정확한 $O(h^4)$ **인 수치미분 공식을 유도해 보자. 식(1)로부터**

$$f'(x) = \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x) - \cdots$$

$$= \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h} + a_2h^2 + a_4h^4 + \cdots \qquad \textbf{---(2)}$$

이다. 여기서 f **와** x **가 고정되었다고 가정하고,** h **에 대한 함수**

$$\phi(h) \overset{\text{정의}}{=} \frac{(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

를 정의하자. 식 (2)로부터

$$\phi(h) = f'(x) - a_2h^2 - a_4h^4 - \cdots$$

$$\phi\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) - a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - \cdots$$

을 얻는다. h^2 **항을 소거하기 위하여** $\phi(h)-4\phi\left(\frac{h}{2}\right)$**를 계산하면**

$$\phi(h)-4\phi\left(\frac{h}{2}\right) = -3f'(x)-\frac{3}{4}a_4h^4 - \cdots$$

이 된다. 여기에서 $f'(x)$**에 대하여 풀면**

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3}\phi(h)+\frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{3}{4}a_4h^4 + \cdots \\ &= -\frac{1}{3}\phi(h)+\frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right)+O(h^4) \end{aligned}$$

을 얻는다.

2계도함수의 수치미분식

테일러 급수로부터 얻은 두 식

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{3!}h^3f^{(3)}(x)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

의 양변을 더하면,

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+2\frac{1}{2!}h^2f''(x)+2\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(x)+\cdots$$

을 얻고, $f''(x)$ **관하여 풀면,**

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{2}{4!}h^2f^{(4)}(x)-\cdots$$

$$=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^2)$$

을 얻는다. 그리하여 오차 $O(h^2)$를 갖는 2계 도함수 $f''(x)$의 근사값을 구하는 **중앙수치미분식**(central difference formula)

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

을 얻는다.

(숙제) p297#3 (1),(2)

수치적분의 필요성

정적분 $\int_0^1 e^{x^2} dx$는 적분값이 존재하지만, 그 값을 구하는 해석학적인 방법을 찾을 수 없다. 따라서 정적분의 근사값을 구하기 위하여 수치적 방법이 필요하다.

수치적분법

구적 마디점 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 가 주어졌을 때, 정적분

$$I[f] \equiv \int_a^b f(x)\,dx$$

의 근사값

$$Q[f] \equiv \Sigma_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

을 구하는 것을 수치적분법(Numerical Integration) 또는 구적법(Quadrature Rule)이라고 하고,

$$E[f] \equiv I[f] - Q[f]$$

을 구적법의 오차라고 한다.

구적법의 종류

미정계수법 : 특정 정밀도가 되도록 가중치를 구하는 일차연립방정식을 푼다.

보간구적법 : 보간함수의 적분값으로 근사값을 주는 경우

Newton-Cotes 구적법 : 마디점들이 동일한 간격인 보간구적법

Gauss-Legendre 구적법 : 마디점들이 Legendre 다항식(정규직교기저함수)의 근.

구적법의 정밀도

구적법 $Q[f]$ 의 **정밀도**는 다음 조건을 만족하는 자연수 n 이다.

(1) n 차 이하의 모든 다항식 $p_n(x)$ 에 대하여 $E[p_n] = 0$

(2) $E[p_{n+1}] \neq 0$ 인 $(n+1)$ 차 다항식 $p_{n+1}(x)$ 이 존재한다.

뉴톤-코트 (Newton-Cote) 구적법

함수 $f(x)$ 의 적분값을, 동일한 간격의 마디점들 위의 $f(x)$ 값들을 보간하는 보간다항식 $p_n(x)$ 의 적분값으로, 근사하는 구적법이다. 즉, $Q[f] = I[p_n]$

닫힌 뉴톤-코트 구적법

적분구간의 양끝점들이 마디점에 포함되어 있는 경우에 **닫힌 뉴톤-코트 구적법**이라고 한다. 등간격($h = \dfrac{b-a}{n}$) 마디점들 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 에서 함수 $f(x)$ 을 보간하는 n 차 이하의 다항식 $p_n(x)$ 는 다음과 같다.

$$p_n(x) = \Sigma_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x)$$

위에서 $\ell_i(x)$ **는** n **차 라그랑지 다항식이다. 따라서 닫힌 뉴톤-코드 구적법은**

$$
\begin{aligned}
Q[f] &= I[p_n] \\
&= \int_a^b p_n(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left[\Sigma_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x)\right] dx \\
&= \Sigma_{i=0}^{n}\left[\int_a^b \ell_i(x)\,dx\right] f(x_i) \\
&= \Sigma_{i=0}^{n} w_i f_i
\end{aligned}
$$

위에서 $f_i = f(x_i)$**,** $w_i = \int_a^b \ell_i(x)\,dx$ **이다.**

닫힌 뉴톤-코트 구적법의 종류

$n = 1, 2, 3, 4$ 에 대한 뉴톤-코트 구적법은 다음과 같다.

(1) ($n=1$) 사다리꼴 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h(f_0 + f_1), \quad h = b - a$$

(2) ($n=2$) Simpson 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2), \quad h = \frac{b-a}{2}$$

(3) ($n=3$) Simpson 3/8 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3), \quad h = \frac{b-a}{3}$$

(4) ($n=4$) Boole 공식

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2}{45}h(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4), \quad h = \frac{b-a}{4}$$

[예제 6.1] 적분 $\int_0^1 (1+e^{-x}\sin(4x))dx$ **의 근사값을 위 4가지 구적법을 이용하여 구하라.**

(풀이) $f(x)=(1+e^{-x}\sin(4x))$ **라 하자.**

(1) **(** $n=1$ **)** $$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}(f(0)+f(1))$$

$$=\frac{1}{2}(1.00000+0.72159)=0.86079$$

(2) **(** $n=2$ **)** $$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}\frac{1}{2}(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1))$$

$$=\frac{1}{3}(1.00000+4\times 1.55152+0.72159)$$

$$=1.32128$$

(3) **(**$n=3$**)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{8}\frac{1}{3}(f(0)+3f(\frac{1}{3})+3f(\frac{2}{3})+f(1))$

$$= 1.31440$$

(4) **(**$n=4$**)** $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{2}{45}\frac{1}{4}[7f(0)+32f(\frac{1}{4})+12f(\frac{1}{2})$

$$+32f(\frac{3}{4})+7f(1)] = 1.30859$$

한편 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ **의 참값은** $1.30825060\cdots$ **이므로** $n=4$ **을 사용하는 Boole 공식의 근사값이 가장 정확함을 알 수 있다.** ■

[숙제] **Boole공식의 값을 컴퓨터로 계산하여라.**

[예제 6.2] **Simpson 3/8 공식에 대한 정밀도를 계산하라.**

(풀이)

$[a,b]=[0,3]$ **로 두자. Simpson 3/8 공식**

$$Q[f] = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

으로부터,

$$I[1] = 3 = \frac{3}{8}(1+3+3+1) = Q[1]$$

$$I[x] = \frac{9}{2} = \frac{3}{8}(0+3+6+3) = Q[x]$$

$$I[x^2] = 9 = \frac{3}{8}(0+3+12+9) = Q[x^2]$$

$$I[x^3] = \frac{81}{4} = \frac{3}{8}(0+3+24+27) = Q[x^3]$$

$$I[x^4] = \frac{243}{5} \neq \frac{99}{2} = \frac{3}{8}(0+3+48+81) = Q[x^4]$$

따라서 Simpson 3/8 공식의 정밀도는 3 **이다.** ■

보간구적법

마디점들 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 이 임의로 주어졌을 때, 함수 $f(x)$를 보간하는 n차 이하 다항식 $p_n(x)$의 적분값으로 $f(x)$의 적분값을 근사하는 방법.

즉 $Q[f]=I[p_n]$

보간구적법의 정밀도 ($\geq n$)

마디점들 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 에서 함수 $f(x)$를 보간하는 n차 이하 다항식이 $p_n(x)$이면 [정리 5.2]에서

$$f(x)=p_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}W(x),\quad W(x)\equiv\Pi_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

로 주어졌다. 그러므로 구적법의 오차는

$$\begin{aligned}E[f]&=I[f]-Q[f]\\&=I[f]-I[p_n]\\&=I[f-p_n]\end{aligned}$$

그러므로

$$E[f] = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} W(x)dx$$

여기에서 원래 함수 $f(x)$가 n차 이하 다항식이라면 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ 이므로 $E[f]=0$ 이다. 그러므로 $Q[f]=I[f]$, 즉 구적법의 정밀도가 적어도 n이 된다.

[예제 6.3] (미정계수법)

임의의 마디점들 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 주어졌을 때, 다음 구적법 $Q[f]$의 정밀도가 n이 되도록 가중치 $w_0, w_1, \cdots, w_n$의 값을 구하라.

$$\int_a^b f(x)dx = I[f] \approx Q[f] = \Sigma_{j=0}^{n} w_j f(x_j)$$

(풀이) 정밀도가 n이 되기 위하여서는

$$Q[x^k] = I[x^k], \ \ k = 0, 1, \cdots, n$$

이므로 미지수를 $w_0, w_1, \cdots, w_n$ 로 갖는 일차연립방정식

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I[1] \\ I[x] \\ I[x^2] \\ \vdots \\ I[x^n] \end{bmatrix}$$

을 얻을 수 있다. 이 연립방정식을 풀면 가중치를 구할 수 있다. ■

복합수치적분법

구적법에서 마디점을 늘리면 정밀도는 높아지지만, 구적법 만들기는 더 어려워진다. 따라서 다음과 같이 구간을 나누어, 소구간에 구적법을 적용하는 **복합수치적분법**이 흔히 사용된다.

(1) 구간 $[a,b]$ 를 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 로 소구간으로 분할한다.

(2) 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에 비교적 낮은 정밀도의 구적법을 적용하여 근사값을 구한다.

(3) 각 소구간에서 구한 근사값을 합한다.

복합사다리꼴 공식

우선 $w(x) \equiv 1$ **을 사용한다. 구간** $[a,b]$**를** n**등분한 소구간** $[x_{i-1}, x_i]$**에 사다리꼴공식을 적용하면**

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{2}h[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

이다. 위에서 $h = (b-a)/n$ **이다. 각 소구간의 적분값을 합하면**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \Sigma_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \\ &= \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{2}h[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{1}{2}h[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{1}{2}h[f(a) + f(b)] + h\,\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_i) \ \equiv T(f,h)\end{aligned}$$

복합 Simpson공식

우선 $w(x) \equiv 1$ 을 사용한다. 구간 $[a,b]$를 $2n$ 등분한 소구간 $[x_{2i-2}, x_{2i}]$에 Simpson 공식을 적용하면

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \frac{1}{3}h[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

이다. 위에서 $h = (b-a)/(2n)$ 이다. 각 소구간의 적분값을 합하면

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \Sigma_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{3}h[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\
&= \frac{1}{3}h[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&= \frac{1}{3}h[f(a) + f(b)] + \frac{2}{3}h\Sigma_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + \frac{4}{3}h\Sigma_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) \quad \equiv S(f,h)
\end{aligned}$$

[예제 6.4] $f(x)=2+\sin(2\sqrt{x})$ **일 때,** $\int_1^6 f(x)dx$**의 근사값을 복합사리꼴 공식과 복합 Simpson 공식을 이용하여 각각 구하여라. 구간은** 10 **등분하라.**

(풀이)

(1) 복합사다리꼴 **(**$n=10,\ h=\dfrac{6-1}{10}=\dfrac{1}{2}$**)**

$$T(f,1/2)=\frac{1}{2}h[f(x_0)+2f(x_1)+\ \cdots\ +2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}[f(1)+2f(1.5)+\ \cdots\ +2f(5.5)+f(6)]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{2}[f(1)+f(6)]+\frac{1}{2}[f(1.5)+\ \cdots\ +f(5.5)]$$

$$\approx 8.19385457$$

(2) 복합Simpson ($n=5,\ h=\dfrac{6-1}{2\times 5}=\dfrac{1}{2}$)

$$S(f,1/2)=\frac{1}{3}h[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ \cdots\ +4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2}[f(1)+4f(1.5)+2f(2)+\ \cdots\ +4f(5.5)+f(6)]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2}[f(1)+f(6)]+\frac{1}{3}\frac{2}{2}[f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(5)]$$

$$+\frac{1}{3}\frac{4}{2}[f(1.5)+f(2.5)+\ \cdots\ +f(5.5)]$$

$$\approx 8.18301550 \qquad \blacksquare$$

[숙제] p312 #1 (4) 복합사다리꼴(n=10),

(1) 컴퓨터숙제 (2) 지필숙제 Wolframalpha에서 적분값을 계산하여 비교

정밀도 n의 보간구적법(복습)

$(n+1)$개의 마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이 주어지면 아래와 같은 보간다항식을 사용하는 보간구적법은 정밀도가 최소한 n임을 보였다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Sigma_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{with } w_i = \int_a^b \prod_{(j=0, j\neq i)}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$$

Gauss구적법 (정밀도 $(2n+1)$)

함수 $q(x)$가 영함수가 아닌 n차 이하의 모든 다항식에 직교하는 함수라면, $q(x)$의 근들을 마디점 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이 주는 구적법을 **Gauss구적법**이다.

가우스구적법의 정밀도는 다음 정리에서 증명하는 것처럼 $(2n+1)$가 된다.

[정리 6.6] 정밀도 $(2n+1)$의 Gauss구적법

마디점들 $x_0, x_1, \cdots, x_n$이, 영함수가 아닌 n차 이하의 모든 다항식에 직교하는, $(n+1)$차 다항함수 $q(x)$의 근들로 주어지면, 이 구적법 (1)은 정밀도$(2n+1)$가 된다.

(증명)

함수 $f(x)$가 $(2n+1)$차 이하 다항식이라면 $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$를 만족하는 n차 이하 다항식 $p(x)$와 $r(x)$가 존재한다. 그런데, $q(x_i) = 0$, $^\forall i = 0, 1, \cdots, n$ 이므로$f(x_i) = r(x_i)$가 성립한다. 한편 $p(x)$의 차수는 n이고, $q(x)$는 n차 이하 다항식에 직교하므로

$$0 = < p, q > \; = \int_a^b p(x) q(x) \, dx$$

그러므로

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b [p(x) q(x) + r(x)] \, dx$$

$$= \int_a^b r(x)\,dx$$

$$= \Sigma_{i=0}^{n} w_i\, r(x_i)$$ **since** $r(x)$ **의 차수가** n**, 정밀도** n

$$= \Sigma_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$$ **since** $f(x_i) = r(x_i)$

따라서 구적법 (1)은 정밀도 $(2n+1)$ **을 갖는다.** ■

[정리 6.7] 내적 $< f, g > \ = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ **이 주어졌을 때,** n **차 이하의 모든 다항식과 직교하는** $(n+1)$ **차 다항식** $q(x)$ **는 구간** (a, b) **에서** $(n+1)$ **개의 서로 다른 실근을 갖는다.**

(증명)

먼저 $< q, 1 > = 0$ **이므로**

$$\int_a^b q(x)(1)\,dx = 0$$

$q(x)$는 구간 (a,b)에서 적어도 한번 부호가 변한다. 왜냐하면 $q(x)$가 한가지 부호만 가지면 적분값이 영이 나올 수가 없기 때문이다. 이제 $q(x)$가 구간(a,b)에서 $k(\le n)$번 부호가 변한다고 가정하자. 그러면 어떤 k개의 마디점

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < b = t_{k+1}$$

들이 존재하여, $q(x)$가 각 마디점을 전후로 부호가 변한다고 하자. 여기서

$$p(x) \equiv (x - t_1)(x - t_2) \cdots (x - t_k)$$

로 정의하면 곱한 함수 $p(x)q(x)$는 항상 양수값을 갖든지, 항상 음수값을 갖게 된다. 그러므로

$$< p,q > = \int_a^b p(x)q(x)\,dx \neq 0$$

이다. 이것은 k차 다항식 $p(x)$가 $q(x)$와 직교한다는 가정에 어긋난다. 그러므로 $q(x)$가 구간(a,b)에서 적어도 $(n+1)$번 부호가 변한다. 한편 $q(x)$는 $(n+1)$차 다항식이므로 부호가 $(n+1)$번 보다 더 많이 변할 수는 없다. 그러므로 연속인 $q(x)$는 구간(a,b)에서 $(n+1)$개의 실근을 갖는다. ■

Gauss-Legendre 구적법

다항식 $\{1, x, x^2, \cdots\}$을 그램-슈미트 방법으로 정규 직교화 한 기저

$$\{q_0(x), q_1(x), q_2(x), \cdots\}$$

의 원소를 **Legendre다항식**이라고 한다. 이 Legendre다항식의 근을 마디점으로 사용하는 Gauss구적법을 특히 **Gauss-Legendre 구적법**이라고 한다.

[예제 6.7] 다음 Gauss구적법의 마디점 x_0, x_1과 가중치 w_0, w_1를 구하여라.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

(풀이)

그램-슈미트 방법을 써서 $\{1, x, x^2\}$에 대응하는 직교다항식들을 구하면,

$$q_0(x) = 1,\ q_1(x) = x,\ q_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

들이다. 따라서 $q_2(x)=0$의 근

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이 구적법의 마디점들이 된다. $q_2(x)$는 [정리6.6]에서 $(n+1)$차 다항식이므로 $n=1$인 경우라서 정밀도가 $(2n+1)=3$이 된다. 즉 3차 다항식까지는 구적법이 참값을 준다. 이 사실을 이용하여 w_0, w_1을 구해 보자.

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_0 1 + w_1 1$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = w_0 x_0 + w_1 x_1$$

이므로

$$2 = w_0 + w_1$$
$$0 = w_0(-1/\sqrt{3}) + w_1(1/\sqrt{3})$$

이 되어 $w_0 = w_1 = 1$을 얻는다. ■

적분구간 $[a,b]$ 에서 Gauss구적법 계산하기

변수변환

$$t=\frac{x-1}{-1-1}a+\frac{x+1}{1+1}b\ ,\quad (-1\leq x\leq 1)$$

$$=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x$$

를 사용하면

$$\int_a^b f(t)dt=\int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x\right)\frac{b-a}{2}dx$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x\right)dx$$

$$\approx\frac{b-a}{2}\Sigma_{i=0}^m\, w_i f\left(\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}x_i\right)$$

와 같이 $[a,b]$ 위의 적분을 $[-1,1]$ 위의 적분으로 대치하고 $(m+1)$ 개의 마디점을 사용하는 Gauss-Legendre 구적법을 적용할 수 있다.

[예제] 2점 가우스 구적법을 사용하여 $\int_1^5 (-x^3+3x)\,dx$ **의 값을 구하여라.**

(풀이) $f(x) = -x^3+3x$ **일 때**

$$\int_1^5 f(x)dx = \frac{5-1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{5+1}{2}+\frac{5-1}{2}x\right)dx$$

$$= 2\int_{-1}^1 f(2x+3)dx$$

$$\approx 2\left[w_0\, f\left(2\frac{-1}{\sqrt{3}}+3\right)+w_1\, f\left(2\frac{1}{\sqrt{3}}+3\right)\right]$$

$$= 2\left[f(1.8453)+f(4.1547)\right]$$

$$= 2\left[-0.7476-59.2524\right]$$

$$= -120$$

■

복합 Gauss-Legendre 구적법

적분 구간 $[a,b]$ 를 n 등분 한다음 각 소구간에 Gauss-Legendre 구적법을 적용하면 복합 Gauss-Legendre 구적법을 만들 수 있다.

$$\int_a^b f(t)dt \approx \Sigma_{j=1}^{n}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{2}\Sigma_{i=0}^{m} w_i f\left(\frac{t_j + t_{j-1}}{2} + \frac{t_j - t_{j-1}}{2}x_i\right)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\Sigma_{j=1}^{n}\left(\Sigma_{i=0}^{m} w_i f\left(\frac{t_j + t_{j-1}}{2} + \frac{h}{2}x_i\right)\right)$$

여기서 $h = \dfrac{b-a}{n},\ t_j = a + j\,h,\ (0 \le j \le n)$

[숙제] p322 #7 (2) Gauss-Legendre구적법, 마디점 2개인 경우
WolframAlpha 의 값과 비교

#9 (1) 복합 Gauss-Legendre구적법, 마디점 2개인 경우, 10등분
WolframAlpha 의 값과 비교

제7장 미분방정식의 수치해법

초기값 문제

다음 미분방정식과 초기조건

$$y' = f(x,y),\ \ x \in [a,b]$$
$$y(a) = \alpha$$

을 초기값 문제라고 한다.

[예제] 다음 초기값 문제를 풀어라.

$$y'(x) = \sin(x),\ \ y(\frac{\pi}{3}) = 2$$

(풀이) 미분방정식의 양변을 적분하면,

$$y(x) = -\cos(x) + c$$

을 얻는다. 적분 상수 c를 정하기 위하여 초기조건을 사용하면

$$2 = -\cos(\pi/3) + c$$

그러므로 $c=2.5$ 이고, 구하는 해는

$$y(x)=2.5-\cos(x)$$

이다. ■

오일러 방법

구간 $[a,b]$ 를 n 등분하여 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 이라 하고, 마디점들을

$$x_i=a+ih,\ i=0,1,\ \cdots\ ,n$$

로 놓고, $y_i=y(x_i)$ 라고 놓자. 도함수 y' 에 대하여 전향수치미분식을 사용하면 초기값문제는

$$y_0=\alpha$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f(x_i,y_i),\ i=0,1,\ \cdots\ ,n$$

와 같이 수치적을 풀 수 있다. 다음 방법을 **오일러방법**이라고 한다.

$$y_0=\alpha$$
$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\ \ i=0,1,\ \cdots\ ,n$$

[예제] 다음 초기치문제의 정확한 해가 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ **임을 보이고, 오일러 방법** $(n=10)$ **을 이용하여 초기값문제**

$$y' = -2xy^2,\ \ 0 \le x \le 2$$
$$y(0)=1$$

의 근사값을 구하고, 정확한 해와 비교하여라.

[숙제] $y' = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} - y^2,\ 1 \le x \le 2$

$y(1) = -1$

참해 : $y = -\dfrac{1}{x}$

Taylor 방법

초기값 문제

$$y' = f(x,y),\ \ x \in [a,b]$$
$$y(a) = \alpha$$

가 유일한 해를 갖고 $y^{(n+1)}(x)$ **가 존재하고 연속임을 가정하자. 구간** $[a,b]$ **를** n **등분하여** $h = \dfrac{b-a}{n}$ **이라 하고, 마디점들을**

$$x_i = a + ih,\ \ i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓자. Taylor 정리에 의하여, $\exists\, \xi \in (x_i, x_{i+1})$**:**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$

이다. Taylor 방법은 위에서 마지막 항을 잘라버리고,

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_i)$$

을 사용한다. 여기에서 $y'(x_i), y''(x_i), \cdots, y^{(n)}(x_i)$는 $y' = f(x,y)$를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$$

$$y''(x_i) = \frac{d}{dx} f(x,y)\bigg|_{(x_i, y(x_i))}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)}(x_i) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x,y)\bigg|_{(x_i, y(x_i))}$$

[예제] 초기값문제

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

에 $h = 0.1$와 3차 Taylor 방법을 이용하여 $y(0.1)$과 $y(0,2)$의 근사값을 구하여라.

(풀이) $y' = x + y$

$$\Longrightarrow \; y'' = \frac{d}{dx}(x+y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$\Longrightarrow \; y''' = \frac{d}{dx}(1+x+y) = 1 + y' = 1 + x + y$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i)$$

$$= y(x_i) + h\,(x_i + y_i) + \frac{h^2}{2}(1 + x_i + y_i) + \frac{h^3}{6}(1 + x_i + y_i)$$

$x_0 = 0,\; y(x_0) = 1$

$$\Longrightarrow \; y_1 = y(x_0) + h\,(x_0 + y_0) + \frac{h^2}{2}(1 + x_0 + y_0) + \frac{h^3}{6}(1 + x_0 + y_0)$$

$$= 1 + 0.1\,(0+1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1+0+1) + \frac{(0.1)^3}{6}(1+0+1)$$

$$\approx 0.11033$$

$$\Longrightarrow y_2 = y(x_1) + h(x_1 + y_1) + \frac{h^2}{2}(1 + x_1 + y_1) + \frac{h^3}{6}(1 + x_1 + y_1)$$

$$= y_1 + 0.1(0.1 + y_1) + \frac{(0.1)^2}{2}(1 + 0.1 + y_1) + \frac{(0.1)^3}{6}(1 + 0.1 + y_1)$$

$$= 1.24278 \qquad \blacksquare$$

[숙제] $y' = x^2,\ y(0) = 1,\ h = 0.02$ **5차 Taylor 방법으로 풀어라.**

2차 Runge-Kutta법

초기값 문제

$$y' = f(x, y),\ x \in [a, b]$$
$$y(a) = \alpha$$

가 유일한 해를 갖고 연속임을 가정하자. 구간 $[a, b]$ **를** n **등분하여** $h = \dfrac{b-a}{n}$

이라 하고, 마디점들을

$$x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓자. 2**차 Runge-Kutta법**

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 \quad \textbf{--(*)}$$

을 구성하는데, (*)를 Taylor급수로 전개하였을 때와 비슷하도록, 실수 α, β, a, b**를 정하여 보자.** k_1, k_2**를 (*)에 대입하고 Taylor급수를 전개하면,**

$$y_{i+1} = y_i + ahf(x_i, y_i) + bhf(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta k_1)$$

여기서

$$f(x_i + \alpha h,\ y_i + \beta k_1) = f(x_i, y_i) + (\alpha h f_x + \beta k_1 f_y)$$
$$+ \left(\frac{(\alpha h)^2}{2!} f_{xx} + \frac{2(\alpha h \beta k_1)}{2!} f_{xy} + \frac{(\beta k_1)^2}{2!} f_{yy} \right) + O(h^3)$$

이므로

$$y_{i+1} = y_i + ahf + bh\left[f + \left(\alpha h f_x + \beta (hf) f_y\right) + \left(\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha h \beta (hf) f_{xy} + \frac{\beta^2 (hf)^2}{2} f_{yy}\right) + O(h^3) \right]$$

$$= y_i + h(a+b) f + h^2 (b\alpha f_x + b\beta f f_y) + h^3 b\left(\frac{\alpha^2}{2} f_{xx} + \alpha\beta f f_{xy} + \frac{\beta^2}{2} f^2 f_{yy}\right) + O(h^4) \quad \text{---(**)}$$

한편, $y(x_{i+1})$ **를** x_n **근방에서 Taylor급수를 전개하면,**

$$y(x_{n+1}) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4)$$

여기에서

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f_y f$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(f_x + f_y f)$$

$$= \left(\frac{d}{dx} f_x\right) + \left(\frac{d}{dx} f_y\right) f + f_y \left(\frac{d}{dx} f\right)$$ **, by 곱의 미분**

$$= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{\partial f_y}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) f$$

$$+ f_y \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)$$ **, by 연쇄법칙**

$$= f_{xx} + f_{xy} f \ + (f_{yx} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f)$$

$$= f_{xx} + f_{xy} f \ + f_{yx} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

$$= f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

그러므로

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f + \frac{h^2}{2}(f_x + f f_x)$$

$$+ \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2 f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_x f_y + f_y^2 f) + O(h^4)$$ **---(***)**

이 된다. 식 (**)과 식(***)을 비교하면,

$$a + b = 1$$

$$b\alpha = b\beta = 1/2$$

이 된다. 위 식을 만족하는 a, b, α, β는 여러 가지가 있으나,

$$a = b = 1/2, \ \alpha = \beta = 1$$

을 택하여 2차 Runge-Kutta법

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + k_2)/2$$

을 얻는다.

4차 Runge-Kutta 법

가장 많이 사용하는 4차 Rung-Kutta법은 오차가 $O(h^5)$인데, 유도하려면 매우

복잡한데 결론적으로 4차 Runge-Kutta법은 다음과 같다.

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

[예제] 초기값문제 $y' = x - y,\ 0 \le x \le 1$

$y(0) = 1$

에 대하여 2**차 Rung-Kutta방법 (** $n = 10$ **) 이용하여 구하고, 참해**

$y = 2e^{-x} + x - 1$**와 비교하여라.**

[숙제] 4차 Rung-Kutta방법

경계값 문제

다음 **미분방정식**과 **초기조건**

$$y'' = f(x, y, y'), \; x \in [a, b]$$
$$y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta$$

을 **경계값 문제**라고 한다.

유한차분법

구간 $[a, b]$를 n등분하여 $h = \dfrac{b-a}{n}$이라 하고, 마디점들을

$$x_i = a + ih, \; i = 0, 1, \cdots, n$$

로 놓고, $y_i = y(x_i)$라고 놓자. 도함수 y'와 2계도함수 y''를 각각

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

로 근사하면, 미분방정식은 차분방정식이 된다.

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}=f(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h})\ ,\ i=1,2,\cdots,n-1$$

경계조건 $y_0=\alpha, y_n=\beta$ 를 이용하면, 일반적으로는 $(n-1)$개의 비선형 연립방정식이 된다. 하지만, $f(x,y,y')$이 선형(y와 y'에 대하여 1차이고, 그 계수들이 x만의 함수인 경우)으로 주어지면 그 차분방정식이 선형연립방정식이 되어 Gauss소거법이나 Jacobi 반복법 등으로 근사해를 구할 수 있다.

[예제] 경계값 문제

$$y''-xy=x^2$$

$$y(1)=2,\ y(2)=1$$

의 근사값을 유한차분법($(n=4)$)으로 구하여라.

(풀이)

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{4}=0.25$$ 이다.

마디점 $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1.0, 1.25, 1.50, 1.75, 2.0\}$**에 대하여**

차분방정식을 구하면

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} - 1.25\,y_1 = 1.25^2$$

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_2}{h^2} - 1.50\,y_2 = 1.50^2$$

$$\frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{h^2} - 1.75\,y_3 = 1.75^2$$

정리하면

$$\begin{aligned} y_0 - (2 + 1.25\,h^2)y_1 + y_2 &= 1.25^2 h^2 \\ y_1 - (2 + 1.50\,h^2)y_2 + y_2 &= 1.50^2 h^2 \\ y_2 - (2 + 1.75\,h^2)y_3 + y_4 &= 1.75^2 h^2 \end{aligned}$$

이되고, 행렬 형식으로 쓰면

$$\begin{bmatrix} -2-1.25h^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2-1.50h^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-1.75h^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25^2h^2 - y_0 \\ 1.50^2h^2 \\ 1.75^2h^2 - y_4 \end{bmatrix}$$

이 된다. 위 선형연립방정식을 Gauss소거법으로 풀면

$$y_1 = 1.4049,\ y_2 = 1.0173,\ y_3 = 0.8656$$

을 얻는다. ■

[숙제] 경계값 문제

$$y'' - xy = 1,\ \ 0 < x < 1$$
$$y(0) = 1,\ y(1) = 2$$

의 근사값을 유한차분법($(n = 4)$)으로 구하여라.

[예제] 경계값 문제

$$y'' + 4(\sin x)y' - 4(\cos x)y = -\sin x$$

$$y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1$$

의 근사값을 유한차분법($(n=5)$**으로 구하여라. 참해** $y = \sin x$**와 비교하라.**

(풀이)

주어진 미분방정식을 차분방정식으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 4(\sin x_i)\frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h} - 4(\cos x_i)y_i = -\sin x_i$$

$$(2 - 4h\sin x_i)y_{i-1} + (-4 - 8h^2\cos x_i)y_i + (2 + 4h\sin x_i)y_{i+1} = -2h^2\sin x_i \quad \blacksquare$$

[숙제] 경계값 문제

$$y'' - y' + 2y = \cos x - \sin x,\ 0 < x < \pi/2$$

$$y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 0$$

의 근사값을 유한차분법$(n=5)$**으로 구하여라. 참해** $y = \cos x$**와 비교하라.**