미분기하학 1학기

김상배 교수 : xxx@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr/Lectures

010-XXXX-7867

문자메세지, 카톡(공부내용 질문)

교과서 : 미분기하학개론

저자: 김향숙,박진석,표용수

출판사: 경문사

수학 : 수와 도형

1) 도형 : 기하학

고대 이집트, 그리이스 플라톤의 아카데미, 유클리드 `원론'

2) 수 : 자연수, 정수, 유리수, 무리수, 복소수

약수와 배수, 솟수(prime number), 정수론

방정식 : 미지수로 등식을 만든다.

대수학 : (대수=숫자를 대신 한 것 =문자=미지수)

방정식 풀기, 아벨, 갈르와-> 현대대수

3) 좌표 : 데카르트 (400년전 쯤), 해석기하학의 창시자

해석학: 무한히 ~ 한다. 함수

연속, 미분, 적분, 급수, 미분기하

4) 집합 : 실수집합을 기초로 추상구조로 확장됨.

제1장 벡터(복습과정)

벡터의 연산

합과 스칼라배

결합, 분배법칙, 벡터의 길이

내적

내적의 성질, 벡터의 평행과 직교

코시-슈바르츠 부등식, 삼각부등식, 피타고라스 정리

정규직교기저, 표준정규직교기저

정사영, 벡터사영

외적

외적의 성질, 스칼라 삼중적

직선과 평면

직선의 방정식

평면의 방정식

벡터장

접벡터(tanget vector)

벡터장(vector field)

점별원리

정규직교기저

표구장(frame field)

자연표구장

주면표구장

구면표구장

제2장 곡선의 국소적 이론

2.1 공간곡선

도함수와 미분가능

실수구간 $I=(a,b)$ 위의 벡터함수

$$\alpha : I \longrightarrow E^3$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

는 공간곡선을 나타내며, 극한값

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

가 존재하면 $\alpha(t)$는 "미분가능하다" 고 하고, 그 극한값을 $\alpha(t)$의

도함수(derivative)라 하며, $\dfrac{d\alpha}{dt}$로 표시 한다.

[예제] $\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$ **이면** $\dfrac{d\alpha}{dt}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right)$ **임을 보여라.**

(풀이)
$$\frac{d\alpha}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x(t+\Delta t),\,y(t+\Delta t),\,z(t+\Delta t))-(x(t),y(t),z(t))}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x(t+\Delta t)-x(t),\,y(t+\Delta t)-y(t),\,z(t+\Delta t))}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right)$$
$$=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$$

[예제]

(1) 점 $p=(p_1,p_2,p_3)$**를 지나고** $q=(q_1,q_2,q_3)$**를 방향벡터로 하는 직선은** $\alpha(t)=p+tq=(p_1+tq_1,p_2+tq_2,p_3+tq_3)$ **로 주어진다.**

(2) 공간곡선 $\alpha(t)=(a\cos(t),a\sin(t),0),t\in(-\infty,\infty)$**는** xy**평면에서 원점을 중심으로 반지름이** a**인 원의 둘레를 움직인다.**

(3) $\alpha(t)=(a\cos(t),a\sin(t),bt),t\in(-\infty,\infty)$ **여기에서** $a>0,b\neq 0$ **는 나선 (circular helix)이라고 한다.**

(4) $\alpha(t)=(t+3,t^2+3,0),t\in(-\infty,\infty)$**는** xy**평면에 놓인 포물선** $y=(x-3)^2+3$ **이다.**

속도벡터

공간곡선 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $t\in I$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의

접벡터 $\alpha'(t)=\left(\dfrac{d\alpha_1(t)}{dt},\dfrac{d\alpha_2(t)}{dt},\dfrac{d\alpha_3(t)}{dt}\right)_{\alpha(t)}$ 를 t에서의 α의

속도벡터(velocity vector) 라고 한다.

가속도벡터

공간곡선 $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))$, $t\in I$ 에 대하여 점 $\alpha(t)$에서의

$\alpha''(t)=\left(\dfrac{d^2\alpha_1(t)}{dt^2},\dfrac{d^2\alpha_2(t)}{dt^2},\dfrac{d^2\alpha_3(t)}{dt^2}\right)_{\alpha(t)}$ 를 t에서의 α의

가속도벡터(acceleration vector) 라고 한다.

속력

공간곡선 $\alpha(t)$에 대하여 **속력(speed)**는 $v(t)=\|\alpha'(t)\|$로 정의한다.

정칙곡선

공간곡선 $\alpha(t)$에 대하여 $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ 일 때, 곡선 α를 정칙곡선 (regular curve) 라고 한다.

접선의 방정식

정칙곡선 α의 $t = t_0$에서의 접선의 방정식 (equation of tagent line)은 $x(t) = \alpha(t_0) + t\alpha'(t_0),\ t \in \mathrm{R}$ 이다.

재매개화

I, J를 R에서 열린구간이라 하자. $\alpha : I \to E^3$는 공간곡선이고 $h : J \to I$ 가 미분가능함수이면, 합성함수 $\beta : J \to E^3$, $\beta = \alpha \circ h$를 h에 의한 α의 재매개화(reparametrization) 라고 한다.

[예제] (주의 : S는 호장은 아님)

곡선 $\beta(s)=(\cos(2s),\sin(2s),0), s\in(0,\pi)$ **는 반지름의 길이가 1인 원** $\alpha(t)=(\cos(t),\sin(t),0), t\in(0,2\pi)$ **의** $t=h(s)=2s$ **에 의한 재매개화임.**

[예제] (주의 : S는 호장은 아님)

$\alpha(t) = (\sqrt{t}, t\sqrt{t}, 1-t)$, $\beta(s)=(s, s^3, 1-s^2)$

[정리] β **가** h **에 의한** α **의 재매개화라고 하면, 다음이 성립한다.**

$$\beta'(s) = h'(s)\alpha'(h(s))$$

호장(arc length)

폐구간 $I=[a,b]$ **에 대하여 곡선** $\alpha : I\to E^3$ **를 호(arc)라고 하고**

$$s=\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$$

를 $t=a$ **에서** $t=b$ **까지의** α **의 호장(arc length)라고 한다.**

(설명) $s = \int_a^b ds = \int_a^b \|d\alpha\| = \int_a^b \|\frac{d\alpha}{dt}\| dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

[예제]

반지름의 길이가 a **인 원** $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), 0), t \in [0, 2\pi]$ **의 원주는** $\int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\pi a$ **이다.**

[예제]

호 $\alpha(t) = (3\cosh(2t), 3\sinh(2t), 6t), t \in [0, \pi]$ **의 길이** s **는** $\|\alpha'(t)\| = 6\sqrt{2}\cosh(2t)$ **로부터,**

$$s = 6\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cosh(2t)\, dt = 3\sqrt{2}\sinh(2\pi)$$

[정리] 곡선 $\alpha : I \to E^3$ **가 정칙이면, 단위속력을 갖는** α **의 재매개화가 존재한다. 즉 호장에 의한 재매개화가 존재한다.**

[증명] I **위의 한점** a **(보통** $a=0$ **으로 선택)를 택하여 호장함수**

$$s(t)=\int_a^t \|\alpha'(u)\|du$$

를 생각하자. 도함수 $s'(t)=\|\alpha'(t)\|$ **에서** α **가 정칙곡선이므로** $\alpha'(u)\neq 0,\ \forall u$ **이다. 그러므로** $s'(t)>0$ **가 되어** $s(t)$ **증가함수가 되어,** $s(t)$ **는 일대일함수이다. 그럼므로 역함수** $t=t(s)$ **를 가진다.** β **를** s **에 의한** α **의 재매개화** $\beta(s)=\alpha(t(s))$ **라고 하면** β **는 단위속력 곡선이다. 왜냐하면,** $\beta'(s)=\alpha'(t(s))t'(s)$ **에서** $t(s)$ **가** $s(t)$ **의 역함수이므로**

$t'(s)=\dfrac{1}{s'(t)}>0$ **이다. 그러므로**

$$\|\beta'(s)\|=\|\alpha'(t(s))\|\frac{1}{s'(t)}$$

$$=s'(t)\frac{1}{s'(t)}=1 \quad \textbf{since} \quad s'(t)=\|\alpha'(t)\|$$

그러므로 β **는 단위속력을 갖는** α **의 재매개화이다.** ■

[예제]

나선의 호장에 의한 재매개화를 구하여라.

(풀이)

나선 $\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$ **의 호장함수는**

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du$$

$$= \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

이므로 $s(t)$ **의 역함수는** $t = \frac{s}{c}$, $(c = \sqrt{a^2+b^2})$ **이다.** $\alpha(t)$ **에** t **를**

대입하면 호장에 의한 재매개화 $\beta(s)$ **는**

$$\beta(s) = \left(a\cos(\frac{s}{c}), a\sin(\frac{s}{c}), \frac{b}{c}s\right)$$ **이다.** ■

[예제]

곡선 $\alpha(t)=(e^t\cos(t),e^t\sin(t),e^t),t\in(-\infty,\infty)$**의 호장에 의한 재매개화를 구하여라.**

(풀이)

$$\alpha'(u)=(e^t\cos(t)-e^t\sin(t),\, e^t\sin(t)+e^t\cos(t),e^t)$$
$$=e^t(\cos(t)-\sin(t),\, \sin(t)+\cos(t),1)$$
$$\|\alpha'(u)\|=e^t(2\cos^2(t)+2\sin^2(t)+1)^{1/2}=e^t\sqrt{3}$$

이므로 호장함수 $s(t)$**는**

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\sqrt{3}\int_0^t e^u du=\sqrt{3}(e^t-1)$$

이고, $s(t)$**의 역함수는**

$$t=\ln(\frac{s}{\sqrt{3}}+1),\ s\in(-\sqrt{3},\infty)$$

이다. 따라서 곡선 $\alpha(t)$의 호장에 의한 재매개화 $\beta(s)$는

$$\beta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), 1\right)$$

으로 표현된다. ■

[정리]

(1) 공간곡선 α가 상수 $\Leftrightarrow$ $\alpha' = 0$

(2) 상수 아닌 공간곡선 α가 직선 $\Leftrightarrow$ $\alpha'' = 0$

(숙제)

(1) 곡선 $\alpha(t) = (\sin(3t)\cos(t), \sin(3t)\sin(t), 0)$은 정칙곡선임을 보이고, $t = \dfrac{\pi}{3}$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 곡선 $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$의 호장에 의해 재매개화를 구하여라.

2.2 곡률과 열률

곡률과 열률의 정의

단위속력곡선 $\beta : I \to \mathbb{E}^3$**에 대하여,**

(1) 단위접벡터장(unit tangent vector field) : $\mathrm{T}(s) = \beta'(s)$

(2) 곡률벡터장(curvature vector field) : $\mathrm{T}'(s) = \beta''(s)$

(3) 곡률(함수) (curvature function) : $\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(s)\|$

(4) 단위 주 법 벡터장(unit principal normal vector field) :

$$\mathrm{N}(s) = \mathrm{T}'(s)/\varkappa(s) \quad (\ \varkappa(s) \neq 0\ )$$

(5) 단위 종 법 벡터장(unit binormal vector field) : $\mathrm{B}(s) = \mathrm{T}(s) \times \mathrm{N}(s)$

(6) 열률(함수) (torsion function) : $\tau(s) = -< \mathrm{B}'(s), \mathrm{N}(s) >$

[정리] 정칙곡선 α는 직선 $\Leftrightarrow$ $\varkappa \equiv 0$

($\Longrightarrow$) α가 직선

$\Longrightarrow \exists\, \mathbf{p},\mathbf{q}: \alpha(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{q},\ {}^{\forall}\mathrm{t} \in \mathrm{I}, (\mathrm{q} \neq 0)$

$\alpha'(t) = \mathrm{q}$ **이므로 호장함수는**

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{q}\|\, du = \|\mathrm{q}\| t$$

호장에 의한 재매개화 $\beta(s)$는

$$\beta(s) = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} s$$

이고 단위접벡터장 $\mathrm{T}(s) = \beta'(s) = \dfrac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$ 이다. 그러므로

$$\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(\mathrm{s})\| = 0,\ {}^{\forall}\mathrm{s}$$

(⟸) $\varkappa \equiv 0$

$\Rightarrow \ \|T'(s)\| = \varkappa(s) = 0, {}^{\forall}s$ **여기에서** s**는 호의 길이.**

$\Rightarrow \ T'(s) = 0, {}^{\forall}s$

$\Rightarrow \ \beta''(s) = T'(s) = 0, {}^{\forall}s$

여기서 $\beta(s)$**는 호장에 의한** $\alpha(t)$**의 재매개화라고 하자.**

$\Rightarrow \ \beta(s) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$**, 여기에서** $\mathbf{a}, \mathbf{b}$**는 상수벡터.**

그러므로 $\beta(s)$**는 직선이다.**

따라서 원래의 $\alpha(t)$**도 직선이다.** ■

[정리] β**가** $\varkappa > 0$**인 단위속력의 공간곡선이면,** β**의 각 점에서 벡터장** $\{T, N, B\}$**는 한 표구를 이룬다.**

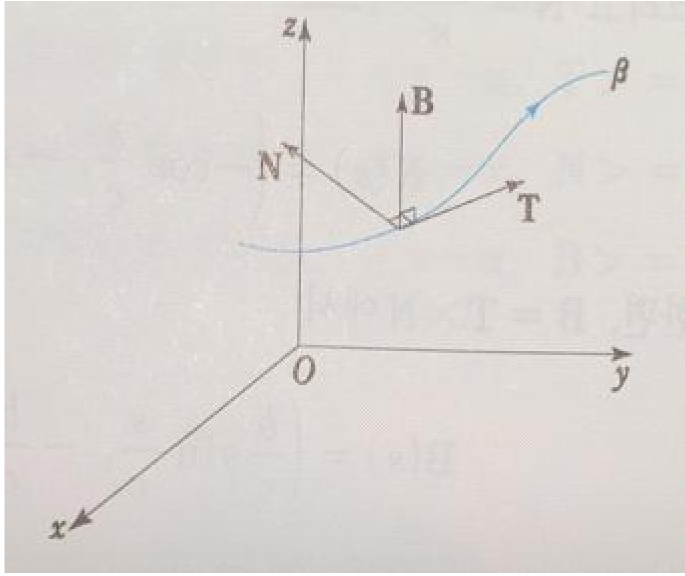
(증명)

다음페이지에

(증명)

정의 $\mathrm{T} = \beta'$ **에 의하여** $\|\mathrm{T}\| = 1$ **이고,** $\varkappa = \|\mathrm{T}'\| > 0$ **이므로**

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{T}'}{\varkappa}, \ \|\mathrm{N}\| = \frac{\|\mathrm{T}'\|}{\varkappa} = 1$$



이다. $< \mathrm{T}, \mathrm{T} > = \|\mathrm{T}\|^2 = 1$ **를 미분**

$$\Rightarrow \ < \mathrm{T}', \mathrm{T} > + < \mathrm{T}, \mathrm{T}' > = 0$$

$$\Rightarrow \ 2 < \mathrm{T}, \mathrm{T}' > = 0$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{T} \perp \mathrm{T}'$$

이므로 $\mathrm{N} \perp \mathrm{T}$ **이다. 또한** $\mathrm{B} = \mathrm{T} \times \mathrm{N}$ **이므로** $\mathrm{B} \perp \mathrm{T}, \mathrm{B} \perp \mathrm{N}$ **이다.**

그러므로 $\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}\}$**는 곡선 위의 각 점에서 표구를 이룬다.** ■

[참고] $\{\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}\}$**를 동삼면체(Moving Trihedron) 또는 Frenet 표구장 (Frenet frame field)라 한다.**

[예제] 나선 $\alpha(t)=(a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $a>0, b\neq 0$ **의 호장에 의한 재매개화는** $\beta(s)=\left(a\cos(\frac{s}{c}), a\sin(\frac{s}{c}), \frac{b}{c}s\right)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ **임을 보였다. 단위속력 나선** $\beta(s)$ **의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$ **를 구하여라.**

(풀이)

$$\mathrm{T}(s)=\beta'(s)=(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c})$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}'(s)=(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Rightarrow \varkappa(s)=\|\mathrm{T}'(s)\|=\frac{a}{c^2}>0$$

$$\Rightarrow \mathrm{N}(s)=\frac{\mathrm{T}'(s)}{\varkappa(s)}=(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}(s)=\mathrm{T}(\mathrm{s})\times\mathrm{N}(s)=(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c})$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}'(s)=(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0)$$

$$\Rightarrow \ \tau(s) = -< \mathrm{B}'(s), \mathrm{N}(s) > \ = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \blacksquare$$

[참고] $b=0$ 이면 나선은 반지름이 a 인 원이므로 반지름이 a 인

원의 곡률과 열률은 $\kappa(s) = \frac{1}{a}$, $\tau(s)=0$ 임을 알 수 있다.

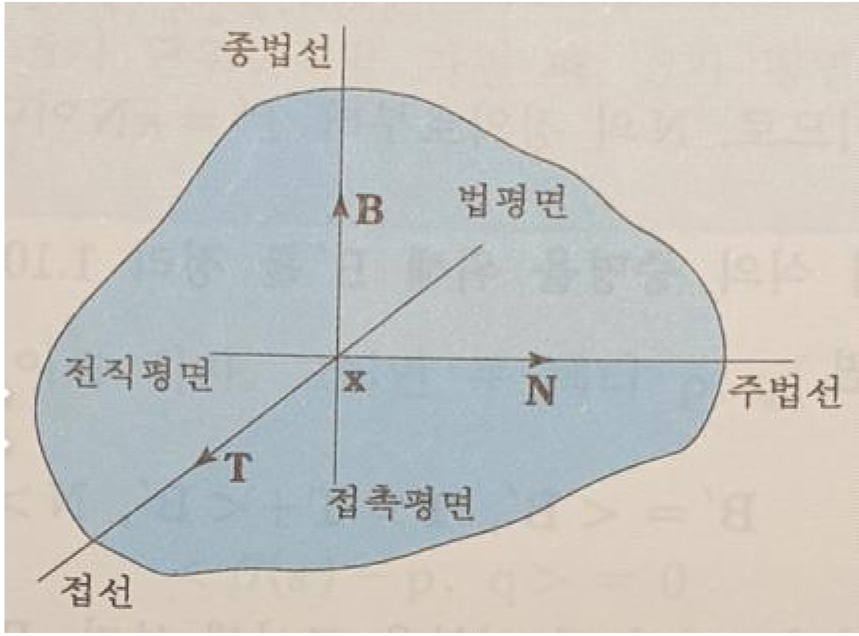
[정의] 공간 곡선 α 에 대하여, 곡선위의 점 $\alpha(a)$ 를 지나면서,

(1) 접벡터 T 를 법벡터로 하는 평면을 법평면(Normal Plane)

(2) 단위주법벡터 N 를 법벡터로 하는 평면을 전직평면(Rectifying Plane)

(3) 단위종법벡터 B 를 법벡터로 하는 평면을 접촉평면(Osculating Plane)

이라고 한다.



[참고] 정칙곡선 $\alpha(s)$ 위의 각 점 x에서의 직선과 평면의 방정식 y는 다음과 같이 주어진다.

접선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{T},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

주법선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{N},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

종법선의 방정식 : $\mathrm{y} = \mathrm{x} + t\mathrm{B},\ \mathrm{t} \in \mathrm{R}$

법평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{T} > = 0$

전직평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{N} > = 0$

접촉평면의 방정식 : $< \mathrm{y} - \mathrm{x}, \mathrm{B} > = 0$

[예제] 정칙곡선 $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$의 $t = 1$에서의 접선의 방정식과 법평면의 방정식을 구하여라.

(풀이)

$t = 1$**에서의** $\alpha(t)$**의 접선의 방정식** x**는**

$$\mathrm{x} = \alpha(1) + t\ \alpha'(1),\ t \in \mathrm{R}$$

$$\mathrm{x} = (1,1^2,1^3) + t\ (1,2(1),3(1)^2)$$
$$= (1+t,\ 1+2t,\ 1+3t),\ \ t \in \mathrm{R}$$

$t=1$ 에서의 $\alpha(t)$ 의 법평면의 방정식 x 는

$$< \mathrm{x} - \alpha(1), \alpha'(1) > \ = 0$$
$$< (x_1, x_2, x_3) - (1,1,1),\ (1,2,3) > = 0$$
$$(x_1 - 1) + 2(x_2 - 1) + 3(x_3 - 1) = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

■

[정리] (Frenet-Serret 정리)

단위속력곡선 $\beta : I \to \mathrm{E}^3$ 의 곡률 $\varkappa(>0)$ 와 열률 τ 에 대하여, 다음 방정식이 성립한다.

(1) $\mathrm{T}' = \varkappa \mathrm{N}$

(2) $\mathrm{N}' = -\varkappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B}$

(3) $\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N}$

(증명)

(1) $\mathrm{N}(s) = \mathrm{T}'(s)/\varkappa(s)$ **이므로** $\mathrm{T}' = \varkappa\,\mathrm{N}$ **이다.**

(2) $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**가 정규 직교 기저이므로**

$$\mathrm{N}' = <\mathrm{N}',\mathrm{T}>\mathrm{T} + <\mathrm{N}',\mathrm{N}>\mathrm{N} + <\mathrm{N}',\mathrm{B}>\mathrm{B}$$

a) $<\mathrm{N},\mathrm{T}> = 0$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{T}> \; = -<\mathrm{N},\mathrm{T}'> \; = -\varkappa$

b) $<\mathrm{N},\mathrm{N}> = 1$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{N}> = 0$

c) $<\mathrm{N},\mathrm{B}> = 0$ **를 미분하면** $<\mathrm{N}',\mathrm{B}> \; = -<\mathrm{N},\mathrm{B}'> \; = \tau$

그러므로

$$\mathrm{N}' = -\varkappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}$$

(3) $\{\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}\}$**가 정규 직교 기저이므로**

$$\mathrm{B}' = <\mathrm{B}',\mathrm{T}>\mathrm{T} + <\mathrm{B}',\mathrm{N}>\mathrm{N} + <\mathrm{B}',\mathrm{B}>\mathrm{B}$$

a) $<\mathrm{B},\mathrm{T}> = 0$**를 미분하면**

$$<\mathrm{B}',\mathrm{T}> + <\mathrm{B},\mathrm{T}'> = 0$$

$$
\begin{aligned}
<\mathrm{B}',\mathrm{T}> &= -<\mathrm{B},\mathrm{T}'> \\
&= -<\mathrm{B},\varkappa\mathrm{N}> \quad \textbf{by (1)} \\
&= -\varkappa <\mathrm{B},\mathrm{N}> = 0
\end{aligned}
$$

b) $\tau = -<\mathrm{B}',\mathrm{N}>$ **이므로** $<\mathrm{B}',\mathrm{N}> = -\tau$

c) $<\mathrm{B},\mathrm{B}> = 1$**를 미분하면** $<\mathrm{B}',\mathrm{B}> = 0$

그러므로

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}' &= 0\mathrm{T} - \tau\mathrm{N} + 0\mathrm{B} \\
&= -\tau\mathrm{N} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

[참고] Frenet-Serret 정리는

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{T} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{B} \end{bmatrix}
$$

로 표현되고 이 때 계수행렬 A**은 반대칭행렬이다. 즉** $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A}$ **.**

[정리] 곡률 $\varkappa > 0$ 인 단위속력곡선 β에 대하여,

β **는 평면곡선** $\Leftrightarrow \ \tau = 0$

($\Rightarrow$) β 가 평면곡선

$\Rightarrow \ \exists\, \mathrm{p,q}(\neq 0) : < \beta(s) - \mathrm{p,q} >= 0,\ {}^{\forall}s$

$\Rightarrow \ < \beta'(s),\ \mathrm{q} >= 0$ **by 미분**

$< \beta''(s),\ q >= 0$ **by 또 미분**

$\Rightarrow \ \mathrm{q} \perp \mathrm{T},\ \mathrm{q} \perp \mathrm{N}$ **since** $\mathrm{T} = \beta',\ \mathrm{N} = \beta''/\varkappa$

$\Rightarrow \ \mathrm{B} = \mathrm{q}/\|\mathrm{q}\|$ **since ((**$\mathrm{B} \perp \mathrm{T},\ \mathrm{B} \perp \mathrm{N}$**)** $\Rightarrow \ \mathrm{B}//\mathrm{q}$ **)**

$\Rightarrow \ \mathrm{B}' = 0$ **since (** q **가 상수)**

$\Rightarrow \ \tau = 0,\ {}^{\forall}s$ **, since (** $\tau = - < \mathrm{B}',\mathrm{N} >$ **)**

($\Leftarrow$) $\tau = 0,\ \forall\, s$

$\Rightarrow \ \mathrm{B}'(\mathrm{s}) = 0,\ {}^{\forall}\mathrm{s}$ **since (** $\mathrm{B}' = -\tau \mathrm{N}$ **by Frenet)**

$\Rightarrow \ \mathrm{B}(\mathrm{s}) \equiv \mathrm{B} =$ **상수** $,\ {}^{\forall}s$

함수 $f(s) \overset{\text{정의}}{=} <\beta(s)-\beta(0), \mathrm{B}>$, $^{\forall}s$

$\Longrightarrow$ $f'(s) = <\beta'(s), \mathrm{B}>$ **by 미분**

$= <\mathrm{T}(s), \mathrm{B}> = 0,\ ^{\forall}s$

$\Longrightarrow$ $f(s) =$ **상수**$= 0,\ ^{\forall}s$

$\Longrightarrow$ $<\beta(s)-\beta(0), \mathrm{B}> = f(s) = 0,\ ^{\forall}s$ **, since** $f(0) = 0$

$\Longrightarrow$ $\beta(s)$**는 상수벡터** B**에 수직한 평면위에 놓여 있다.**

$\Longrightarrow$ $\beta(s)$**는 평면곡선** ■

[정리] 단위속력곡선 β**에서 곡률** $\kappa > 0$**, 열률** $\tau = 0$**이면,** β**는 반지름의 길이가** $1/\kappa$**인 원의 일부이다.**

(증명)

$\tau = 0$**이면** β**는 평면곡선이다. by 앞 정리.**

함수 $\gamma(s) = \beta(s) + \dfrac{1}{\varkappa(s)}\mathrm{N}(s),\ {}^{\forall}s$

$\Longrightarrow\ \gamma' = \beta' + (1/\varkappa)\mathrm{N}'$ **by 미분**

$= \mathrm{T} + \dfrac{1}{\varkappa}(-\varkappa\mathrm{T}) = 0$

$\Longrightarrow\ \exists\,\mathrm{c}$ **상수 :** $\gamma(s) \equiv \mathrm{c},\ {}^{\forall}s$

$\Longrightarrow\ \mathrm{c} = \beta(s) + \dfrac{1}{\varkappa(s)}\mathrm{N}(s),\ {}^{\forall}s$

$\Longrightarrow$ c **는 접촉평면에 속하고,**

$\|\mathrm{c} - \beta(s)\| = \|\dfrac{1}{\varkappa(s)}\mathrm{N}(s)\| = \dfrac{1}{\varkappa}$

$\Longrightarrow\ \beta(s)$ **는 중심이** c **이고 반지름이** $1/\varkappa$ **인 원의 일부** ■

[참고]

(1) 반지름의 길이가 a **인 원의 곡률과 열률은 각각** $\varkappa(s) = 1/a$**,**
$\tau(s) = 0$ **이다. 즉 위 정리의 역도 성립한다.**

(2) $\varkappa \equiv 0 \Leftrightarrow$ **곡선** β**가 직선**
그러므로 곡률 $\varkappa$**는 곡선의 굽은 양을 나타낸다.**

(3) $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$ **곡선** β**가 평면곡선**
그러므로 열률 τ**는 공간속에서 곡선의 비틀림을 나타낸다.**

(숙제) 곡선 $\beta(s) = \left(\frac{5}{13}\cos(s), \frac{8}{13} - \sin(s), -\frac{12}{13}\cos(s)\right)$**는 단위속력 곡선임을 보이고,** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$**를 구하여라.**

2.3 자연방정식

[정리] 정칙곡선은 호장의 함수인 곡률과 열률에 의하여 공간 상의 위치를 제외하고는 오직 하나로 결정된다.

[증명]

두 정칙곡선 C와 C^*가

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa^*(s), \ {}^\forall s \\ \tau(s) &= \tau^*(s), \ {}^\forall s \end{aligned} \quad \text{--(1)}$$

를 만족한다고 하자. C와 C^*의 호장에 의한 재매개화를 각각 $\beta(s), \beta^*(s)$라고 하자. C^*를 한 점 $s = s_0$에서 C와 일치 하도록 평행이동 시키고, s_0에서 $\{T_0, N_0, B_0\}$와 $\{T_0^*, N_0^*, B_0^*\}$가 일치 하도록 C^*를 회전이동 시킨다. Frenet-Serret 정리와 식(1)을 이용하여

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} < T, T^* > &= < \kappa N, T^* > + < T, \kappa^* N^* > \\ &= \kappa(< N, T^* > + < T, N^* >) \ \text{since } \kappa = \kappa^* \end{aligned}$$

$$\frac{d}{ds}<\mathrm{N},\mathrm{N}^*> \;=\; <-\varkappa\mathrm{T}+\tau\mathrm{B},\mathrm{N}^*>+<\mathrm{N},-\varkappa^*\mathrm{T}^*+\tau^*\mathrm{B}^*>$$

$$= -\varkappa(<\mathrm{T},\mathrm{N}^*>+<\mathrm{N},\mathrm{T}^*>)$$

$$+\tau(<\mathrm{B},\mathrm{N}^*>+<\mathrm{N},\mathrm{B}^*>) \quad \textbf{since} \quad \varkappa=\varkappa^*, \tau=\tau^*$$

$$\frac{d}{ds}<\mathrm{B},\mathrm{B}^*> \;=\; <-\tau\mathrm{N},\mathrm{B}^*>+<\mathrm{B},-\tau^*\mathrm{N}^*>$$

$$= -\tau(<\mathrm{N},\mathrm{B}^*>+<\mathrm{B},\mathrm{N}^*> \quad \textbf{since} \quad \tau=\tau^*$$

위 세 식을 모두 합하면

$$\frac{d}{ds}(<\mathrm{T},\mathrm{T}^*>+<\mathrm{N},\mathrm{N}^*>+<\mathrm{B},\mathrm{B}^*>)=0$$

위를 s**에 관하여 적분하면,**

$$<\mathrm{T},\mathrm{T}^*>+<\mathrm{N},\mathrm{N}^*>+<\mathrm{B},\mathrm{B}^*> \;=\; \textbf{상수}$$

이다. 점 s_0**에서는** $\mathrm{T}_0=\mathrm{T}_0{}^*, \mathrm{N}_0=\mathrm{N}_0{}^*, \mathrm{B}_0=\mathrm{B}_0{}^*$ **이므로 위 상수는** 3 **이어야 한다. 그런데** $<\mathrm{T},\mathrm{T}^*>\le 1,\ <\mathrm{N},\mathrm{N}^*>\le 1,\ <\mathrm{B},\mathrm{B}^*>\le 1$

이므로

$$< \mathrm{T}, \mathrm{T}^* > \; = \; < \mathrm{N}, \mathrm{N}^* > \; = \; < \mathrm{B}, \mathrm{B}^* > = 1$$

따라서 모든 s에 대하여

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^*,\ \mathrm{N} = \mathrm{N}^*,\ \mathrm{B} = \mathrm{B}^*$$

이고, $\mathrm{T} = \mathrm{T}^*$ 를 s에 관하여 적분하면,

$$\beta(s) = \beta^*(s) + c, \ c \text{는 상수}$$

점 s_0에서 $\beta(s_0) = \beta^*(s_0)$이므로 $c = 0$ 이다. 따라서

$$\beta(s) = \beta^*(s), \ ^{\forall} s$$

즉 두 곡선 C와 C^*는 평행이동과 회전이동을 통하여 포개어 놓을 수 있다. ■

[정의] 호장 s로 표현되는 곡선의 곡률 $\kappa = \kappa(s)$과 열률 $\tau = \tau(s)$을 곡선의 자연방정식(natural equation) 또는 본질방정식(intrinsic equation)라고 한다.

[예제]

(1) 직선의 방정식은 $\kappa(s)=0, \tau(s)=0$ **이다.**

(2) 반지름 $1/\kappa$ **인 원의 방정식은** $\kappa(s)=$ **상수**$(\neq 0), \tau(s)=0$ **이다.**

(3) 나선의 방정식은 $\kappa(s)=$**상수**$(\neq 0), \tau(s)=$**상수**$(\neq 0)$ **이다.**

주어진 상수 κ, τ **로부터 나선의 방정식 (주의 : 교재에 오류 있음)**

$$\beta(s)=\left(\frac{\kappa}{\delta^2}\cos(\delta s), \frac{\kappa}{\delta^2}\sin(\delta s), \frac{\tau}{\delta}s\right), \ \delta=\sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

이 얻어진다. 왜냐하면, 이전에 주어진 나선 방정식 $\beta(s)$ **와** κ, τ **는**

$$\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}s\right), \ c=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}, \tau=\frac{b}{a^2+b^2}$$

이었다. 그러므로

$$\beta(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \cdots \sin(\cdots)\ ,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s \right)$$

$$\varkappa^2+\tau^2 = \frac{1}{a^2+b^2},\quad \varkappa = a(\varkappa^2+\tau^2),\ \tau = b(\varkappa^2+\tau^2)$$

이 되고,

$$\beta(s) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s),\ \cdots \sin(\cdots)\ ,\ \frac{\tau}{\varkappa^2+\tau^2}\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s \right)$$

$$= \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^2+\tau^2}\cos(\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}\,s),\ \cdots \sin(\cdots)\ ,\ \frac{\tau}{\sqrt{\varkappa^2+\tau^2}}s \right)$$

$$= \left(\frac{\varkappa}{\delta^2}\cos(\delta s), \frac{\varkappa}{\delta^2}\sin(\delta s), \frac{\tau}{\delta}s \right),\ \delta = \sqrt{\varkappa^2+\tau^2}$$ 이 된다. ■

2.4 임의속력곡선

호장에 의한 재매개화를 구하려면 적분하고 역함수를 구해야 하는데 어렵거나 불가능할 수가 있다. 따라서 단위속력곡선이 아닌 임의속력곡선에 대한 $\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B},\varkappa,\tau$ 를 직접 구해보자.

[정리] $\alpha(t)$ **가 정칙인 공간곡선일 때, 다음이 성립한다.**

$$\mathrm{T}=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|},\ \mathrm{N}=\mathrm{B}\times\mathrm{T},\ \mathrm{B}=\frac{\alpha'\times\alpha''}{\|\alpha'\times\alpha''\|}$$

$$\kappa=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},\ \tau=\frac{<\alpha'\times\alpha'',\alpha'''>}{\|\alpha'\times\alpha''\|^2}$$

(증명) T **는** α' **방향의 단위벡터이므로** $\mathrm{T}=\dfrac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ **이다.** $\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}$ **이므로** $\mathrm{N}=\mathrm{B}\times\mathrm{T}$ **이다. 속도를** $v=\|\alpha'\|(>0)$ **로 놓으면,** $\alpha'=v\mathrm{T}$ **이고,**

$$\begin{aligned}\alpha''&=\frac{dv}{dt}\mathrm{T}+v\frac{d\mathrm{T}}{dt}\\&=\frac{dv}{dt}\mathrm{T}+v\frac{ds}{dt}\,\mathrm{T}'(s)\\&=\frac{dv}{dt}\mathrm{T}+v^2\,\kappa\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

이므로 $$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= (v\mathrm{T}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathrm{T} + v^2 \varkappa \mathrm{N}\right) \\ &= v\frac{dv}{dt}(\mathrm{T} \times \mathrm{T}) + \varkappa v^3 (\mathrm{T} \times \mathrm{N}) \\ &= 0 + \varkappa v^3 \mathrm{B} = \varkappa v^3 \mathrm{B} \end{aligned}$$

이 된다. 그러므로 $\|\alpha' \times \alpha''\| = |\varkappa v^3| \, \|\mathrm{B}\| = \varkappa v^3$ **이다.** $\varkappa = 0$**의 경우에는 직선이 되고,** $\alpha' \times \alpha'' = 0$**이 되어 자명하므로,** $\varkappa \neq 0$**을 가정하면,**

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\varkappa v^3} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

$$\varkappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{v^3} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

을 얻는다. 한편, 위에서 얻은 $\alpha'' = \dfrac{dv}{dt}\mathrm{T} + \varkappa v^2 \mathrm{N}$ **을 한번 더 미분하여,**

$$
\begin{aligned}
\alpha''' &= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{d\mathrm{T}}{dt} + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2\frac{d\mathrm{N}}{dt} \\
&= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{ds}{dt}\frac{d\mathrm{T}}{ds} + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2\frac{ds}{dt}\frac{d\mathrm{N}}{ds} \\
&= \frac{dv^2}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{dv}{dt}\,\frac{ds}{dt}(\varkappa\mathrm{N}) + \frac{d}{dt}(\varkappa v^2)\mathrm{N} + \varkappa v^2 v(-\varkappa\mathrm{T} + \tau\mathrm{B}) \\
&= (\ldots)\mathrm{T} + (\ldots)\mathrm{N} + (\varkappa v^3\tau)\mathrm{B}
\end{aligned}
$$

을 얻는다. $\alpha' \times \alpha'' = \varkappa v^3\mathrm{B}$ **과 위의** α''' **내적하면,**

$$
\begin{aligned}
< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' > &= < \varkappa v^3\mathrm{B},\ (\ldots)\mathrm{T} + (\ldots)\mathrm{N} + (\varkappa v^3\tau)\mathrm{B} > \\
&= (\varkappa v^3)^2\tau \\
&= \|\alpha' \times \alpha''\|^2\,\tau
\end{aligned}
$$

이므로 열률 공식 $\tau = \dfrac{< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' >}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$ **를 얻는다.** ■

[예제] $a\,(>0)$ **가 상수일 때, 현수선** $\alpha(t)=(a\cosh(t/a),t,0)$ **의 자연방정식을 구하라. (이 경우에는 호장 매개변수로 구하는 것보다, 임의속력곡선의 공식으로 구하는 것이 더 쉽다.)**

(풀이)

(i) $\alpha'(t)=(\sinh(t/a),1,0)$ **이므로**

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\sinh^2(t/a)+1}=\cosh(t/a)$$

이다. 또 $\alpha''(t)=(1/a\cosh(t/a),0,0)$ **로부터**

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t)=(0,0,-(1/a)\cosh(t/a))$$

이므로 곡률은

$$\kappa(t)=\frac{\|\alpha'\times\alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}=\frac{1}{a\cosh^2(t/a)} \quad \text{--- (1)}$$

자연방정식은 호장을 매개변수로 가지므로, 호장을 구하면,

$$s(t)=\int_0^t\|\alpha'(u)\|du=\int_0^t\cosh(u/a)du=a\sinh(t/a)$$

을 얻고, 곡률의 분모가 될 부분

$$s^2 + a^2 = a^2 \sinh^2(t/a) + a^2 = a^2 \cosh^2(t/a)$$

을 계산하여 (1)식에 대입하면 곡률

$$\varkappa = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

을 얻는다. 한편, $\alpha(t)$ **는 평면곡선이므로 열률은** $\tau(t) = 0, \ {}^{\forall} t$ **이다.**
따라서 현수선의 자연방정식은

$$\varkappa(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \ , \ \tau(s) = 0$$

이다. ■

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (1 + t^2, t, t^3)$ **의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$ **를 구하라.**
(풀이) 다음페이지에

(풀이)

$$\alpha'(t) = (2t, 1, 3t^2),\ \alpha''(t) = (2, 0, 6t),\ \alpha'''(t) = (0, 0, 6)$$

이므로

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6t, -6t^2, -2)$$

$$< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) > = -12$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{T} = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(2t, 1, 3t^2)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{(3t, -3t^2, -1)}{\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{B} \times \mathrm{T} = \frac{(1-9t^4,\ -2t-9t^3, 3t+6t^3)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}\sqrt{1+9t^2+9t^4}}$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{4+36t^2+36t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}},\ \tau = \frac{-12}{4+36t^2+36t^4} \qquad \blacksquare$$

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ **의** $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}, \varkappa, \tau$ **를 구하라.**

(풀이)

$$\alpha'(t) = 3(1-t^2, 2t, 1+t^2),\ \alpha''(t) = 6(-t, 1, t),$$

$$\alpha'''(t) = 6(-1, 0, 1)$$

이므로

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{18}(1+t^2)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = 18(-1+t^2, -2t, 1+t^2)$$

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 18\sqrt{2}(1+t^2)$$

$$<\alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t)> = 6 \cdot 18 \cdot 2 = 216$$

이다. 그러므로

$$\mathrm{T}=\frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}=\frac{(1-t^2,\,2t,\,1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}$$

$$\mathrm{B}=\frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}=\frac{(-1+t^2,\,-2t,\,1+t^2)}{\sqrt{2}\,(1+t^2)}$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{B}\times\mathrm{T}=\frac{(-2t,\,1-t^2,0)}{1+t^2}$$

$$\varkappa=\tau=\frac{1}{3(1+t^2)^2} \qquad \blacksquare$$

[숙제] 곡선 $\alpha(t)=(t-\cos(t),\sin(t),t)$**의** $\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B},\varkappa,\tau$ **를 구하라.**

2.5 곡률과 열률의 관계

주어진 곡선 β로부터 새로운 곡선 γ를 만들고, γ의 성질을 조사함으로 원래의 곡선 β의 성질을 알아 보자.

[정의] 주어진 곡선 β위의 한 단위벡터장이 만드는 반지름의 길이가 1인 구면 위의 곡선 γ를 주어진 단위벡터장의 **구면곡선**(sperical curve)라 한다.

(주의) 구면곡선 γ는 일반적으로 단위속력곡선이 되지는 않는다.

왜냐하면, 예를 들어, $\gamma(s)=\mathrm{T}(s)$일 때,

$$\|\gamma'(s)\|=\|\mathrm{T}'(\mathrm{s})\|=\|\varkappa(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s})\|=\varkappa(\mathrm{s})$$

이기 때문이다. 그런데 만약 $\varkappa(s)\equiv 1$ 이라면 γ가 단위속력곡선이 된다.

[예제] 단위속력 나선

$$\beta(s)=\left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right),a\sin\left(\frac{s}{c}\right),\frac{b}{c}s\right),\ c=\sqrt{a^2+b^2},\ a>0,\ b>0$$

에 대하여,

$$\gamma(s)=\mathrm{T}(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\left(\frac{s}{c}\right),\frac{a}{c}\cos\left(\frac{s}{c}\right),\frac{b}{c}\right)$$

는 β**위에 있는 단위접벡터장** T**에 대한 구면곡선이다. 이 곡선은 평면** $z=\frac{b}{c}$ **위에 있는 반지름의 길이** $\frac{a}{c}$ **인 원의 일부를 나타낸다.**

[정리] $\varkappa>0$ **인 정칙곡선** β**의 단위접벡터장** T**의 구면곡선** γ**의 곡률을** $\varkappa_\gamma$ **라하면 다음이 성립한다.**

$$\varkappa_\gamma{}^2=1+\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)^2$$

(증명) $\gamma = \mathrm{T}$ **로 정의 되므로,**

$$\gamma' = \mathrm{T}' = \varkappa \mathrm{N}$$

$$\gamma'' = \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa \mathrm{N}'$$

$$= \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa(-\varkappa \mathrm{T} + \tau \mathrm{B})$$

$$\gamma' \times \gamma'' = \varkappa \mathrm{N} \times \left(-\varkappa^2 \mathrm{T} + \frac{d\varkappa}{ds}\mathrm{N} + \varkappa\tau \mathrm{B}\right)$$

$$= -\varkappa^3(\mathrm{N} \times \mathrm{T}) + \varkappa^2\tau(\mathrm{N} \times \mathrm{B})$$

$$= \varkappa^3(\mathrm{B}) + \varkappa^2\tau(\mathrm{T})$$

임의속력곡선 γ **의 곡률** $\varkappa_\gamma$ **은 다음과 같다.**

$$\varkappa_\gamma = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\varkappa^2\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\varkappa^3} = \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\varkappa} = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\varkappa}\right)^2} \quad \blacksquare$$

[정리] 중심이 원점에 있고 반지름의 길이가 a인 구면 위에 있는 단위속력 곡선 $\beta(s)$의 곡률 $\varkappa$는 $\varkappa \geq (1/a)$이다.

(증명)

$\|\beta(s)\| = a$ **이므로** $<\beta(s), \beta(s)> = a^2$ **이고, 양변을 미분하면,**

$$2 < \beta'(s), \beta(s) > = 0$$

$$< \mathrm{T}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > = 0$$

또 미분하여,

$$< \mathrm{T}'(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > + < \mathrm{T}(\mathrm{s}), \beta'(\mathrm{s}) > = 0$$

$$< \varkappa \mathrm{N}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > + < \mathrm{T}(\mathrm{s}), \mathrm{T}(\mathrm{s}) > = 0$$

$$\varkappa < \mathrm{N}(\mathrm{s}), \beta(\mathrm{s}) > = -1$$

양변에 절대값을 취하면, 코시슈바르츠 부등식에 의하여,

$$1 \leq \varkappa(s) \, | < \mathrm{N}(s), \beta(s) > | \leq \varkappa(s) \|\mathrm{N}(s)\| \, \|\beta(s)\| = \varkappa(s) a$$

이 되므로, $\varkappa(s) \geq \dfrac{1}{a}$ **이다.** ■

(주목) $\varkappa = 1/a$ 인 경우는 β가 구면위의 대원일 때이고, 대원이 아닌 경우는 곡률이 $1/a$ 보다 크다는 것을 알 수있다.

[정의] 3차원 공간안의 정칙곡선 α의 단위접벡터장 T가 어떤 상수 단위벡터 u와 항상 일정한 각 θ를 이룰 때, 즉 $<\mathrm{T}, u> = \cos\theta =$ 상수일 때 곡선 α를 **주면나선**(cylindrical helix)이라고 한다. 이때 u는 주면나선의 **축**(axis), θ는 **경사도**(pitch)라 한다.

[정리] 곡률 $\varkappa > 0$ 인 정칙곡선 α에 대하여,

$$\alpha \text{가 주면나선} \iff \frac{\tau}{\varkappa} = \text{상수}$$

(증명)

곡선의 모양은 속력과 무관하므로, α를 단위속력곡선이라고 가정해도 좋다.

($\Longrightarrow$)

α **가 주면나선**

$\Longrightarrow$ $\exists$ **상수 단위벡터** u **:** $< \mathrm{T}, u > =$ **상수**

$\Longrightarrow$ $< \mathrm{T}', u > = 0 \Longrightarrow \varkappa < \mathrm{N}, u > = 0$

$\Longrightarrow$ $< \mathrm{N}, u > = 0 \Longrightarrow \mathrm{N} \perp u$

$\Longrightarrow$ $\exists$ **상수** θ **:** $u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$

$\Longrightarrow$ $0 = \cos(\theta)(\varkappa \mathrm{N}) + \sin(\theta)(-\tau \mathrm{N})$ **by 양변미분**

$\Longrightarrow$ $0 = \varkappa \cos(\theta) - \tau \sin(\theta)$

$\Longrightarrow$ $\dfrac{\tau}{\varkappa} = \cot(\theta) =$ **상수**

($\Longleftarrow$)

$\dfrac{\tau}{\varkappa} =$ **상수** $\Rightarrow$ $\exists$ **상수** θ **:** $\dfrac{\tau}{\varkappa} = \cot(\theta)$

$\Longrightarrow\ 0 = \varkappa\cos(\theta) - \tau\sin(\theta)$

$\Longrightarrow\ 0 = [\,\cos(\theta)\,(\varkappa\,) + \sin(\theta)\,(-\tau)\,]\,\mathrm{N}$

$\Longrightarrow\ 0 = \cos(\theta)\,(\varkappa\mathrm{N}) + \sin(\theta)\,(-\tau\mathrm{N})$

$\Longrightarrow \exists$ **상수벡터** u : $u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$ **by 양변적분**

$\Longrightarrow\ <\mathrm{T}, u> = \cos(\theta)$

$\Longrightarrow\ <\mathrm{T}, u> =$ **상수**

$\Longrightarrow\ \alpha$ **가 주면나선** ■

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ **는 이전 예제에서 임의속력곡선 공식을 사용하여** $\varkappa = \tau$ **을 보였다. 따라서** α **는** $\tau/\varkappa = 1$ **인 주면나선 곡선이다. 이 경우, 주면나선의 경사도** θ **와 축** u **를 구해 보자.**

$$\frac{\tau}{\varkappa} = 1 = \cot(\theta)$$

이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ **이고,** $\cos(\theta) = \sin(\theta) = 1/\sqrt{2}$ **이다. 따라서**

$$u = \cos(\theta)\mathrm{T} + \sin(\theta)\mathrm{B}$$

앞선 예제에서 $t=0$ **을 대입하면** $\mathrm{T} = (1,0,1)/\sqrt{2}, \mathrm{B} = (-1,0,1)/\sqrt{2}$ **이므로**

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = (0,0,1)$$

따라서, 경사도 θ **와 축** u **은 다음과 같다.**

$$\theta = \frac{\pi}{4}, u = (0,0,1) \qquad \blacksquare$$

[예제] $2b^2 = 3a$ **일 때, 곡선** $\alpha(t) = (at, bt^2, t^3)$ **의 각 점에서 접벡터는 벡터** $\mathrm{a} = (1,0,1)$ **과 일정한 각을 이룸을 보여라.**

(풀이)

$\alpha'(t) = (a, 2bt, 3t^2)$ **이므로** $2b^2 = 3a$ **를 이용하면**

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4} = a + 3t^2$$

이다. 따라서 접벡터 $\alpha'(t)$**와 벡터** a**사이의 각** θ**의 코사인은**

$$\cos(\theta) = \frac{<\alpha'(\mathrm{t}), \mathrm{a}>}{\|\alpha'(t)\| \, \|\mathrm{a}\|} = \frac{a+3t^2}{(a+3t^2)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로 접벡터와 벡터 a**사이의 각은 항상** $\pi/4$**이다 즉** α**는 주면나선 이다.** ■

(숙제) $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$**이 주면나선임을 보이고 축과 경사도를 구하라.**

제3장 곡선의 대역적 이론

3.1 평면곡선의 대역적 이론

[정의]

(1) 평면에서 정칙인 단위속력곡선 $\beta(s)$에서 $\mathrm{t}(s)=\beta'(s)$를 **단위접벡터장**(unit tanget vectro field)라고 한다.

(2) $\{t(s), \mathrm{n}(s)\}$가 우수정규직교기저를 이루는 $\mathrm{n}(s)$를 **단위법벡터장**(unit normal vectro field)라고 한다.

(3) $k(s) = < \mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s) >$ 를 **평면곡률**(plane curvature)라고 한다.

(참고)

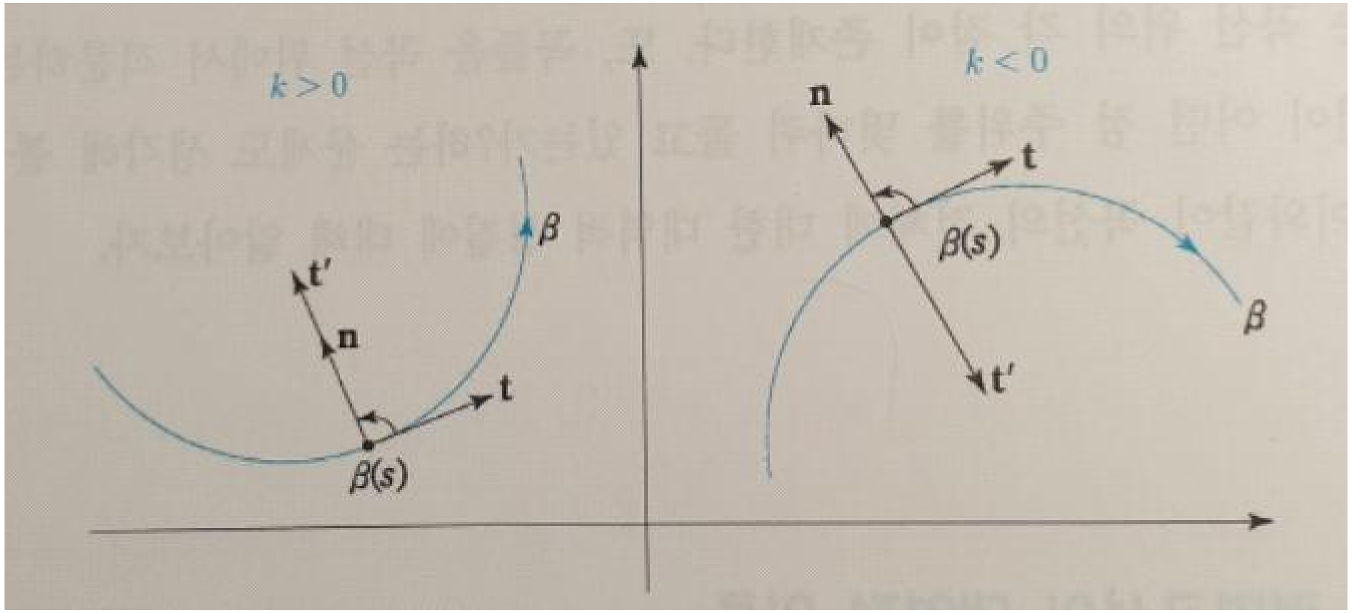
(1) 평면곡률은 공간곡률과 구별하기 위하여 $\kappa(s)$대신 $k(s)$를 사용한다.

(2) 단위속력곡선 $\beta(s) = (x(s), y(s))$에서 $\mathrm{t}(s) = (x'(s), y'(s))$이고 $\mathrm{n}(s) = (-y'(s), x'(s))$이다. 왜냐하면

$$\det\begin{bmatrix} x'(s) & y'(s) \\ -y'(s) & x'(s) \end{bmatrix} = 1 > 0$$

이므로 오른쪽 회전 방향이고, $\|\mathrm{t}\| = \|\mathrm{n}\| = 1$ **이고,** $<\mathrm{t}, \mathrm{n}> = 0$ **이기 때문이다. 즉** $\{t(s), \mathrm{n}(s)\}$**가 우수정규직교기저를 이룬다.**

(3) 공간곡률은 항상 $\varkappa(s) = \|\mathrm{T}'(s)\| \geq 0$ **로 정의했던 것과 달리 평면 곡률을** $k(s) = <\mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s)>$ **은 음의 값을 가질 수 있다. 양수이면 법벡터와** n**과 같은 방향이고 음수이면** n**과 반대방향이다.**



[예제]

(1) $\beta(s) = \left(r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r})\right)$**는 반시계방향으로 움직이는 반지름이 r인 단위속력을 갖는 원이다. 이 때**

$$\mathrm{t} = \left(-\sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\right),\ \mathrm{n} = \left(-\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\right),\ k = \frac{1}{r}$$ **이다.**

(2) $\beta(s) = \left(r\cos(\frac{s}{r}), -r\sin(\frac{s}{r})\right)$**는 시계방향으로 움직이는 반지름이 r인 단위속력을 갖는 원이다. 이 때**

$$\mathrm{t} = \left(-\sin(\frac{s}{r}), -\cos(\frac{s}{r})\right),\ \mathrm{n} = \left(\cos(\frac{s}{r}), -\sin(\frac{s}{r})\right),\ k = -\frac{1}{r}$$

로서 평면곡률 $k(s)$가 음수임에 주목하여라.

[정의] 정칙인 평면곡선 $\alpha(t)$가 주기함수일 때, 즉

$$\exists\, a > 0 : \alpha(t) = \alpha(t+a)$$

이면 α는 폐곡선(closed curve)라고 한다. 이 때 상수 a의 최솟값을 α의 주기(period)라고 한다.

[정리] $\alpha(t)$가 주기 a를 갖는 폐곡선이고, $\beta(s)$가 α의 호장에 의한 재매개화이면, β도 폐곡선이고 주기는 $\ell = \int_0^a \left\| \dfrac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$이다.

(증명)

$$s(t+a) = \int_0^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_0^{a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt + \int_a^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \ell + \int_a^{t+a} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \ell + \int_0^{t} \left\| \frac{d\alpha(t)}{dt} \right\| dt \quad \textbf{since } \alpha\textbf{의 주기가 } a$$

$$= \ell + s(t) = s(t) + \ell \qquad \textbf{---(1)}$$

따라서,

$$\beta(s+\ell) = \beta(s(t)+\ell)$$

$$= \beta(s(t+a)) \ \textbf{by (1)}$$

$$= \alpha(t+a)$$

$$= \alpha(t) \ \textbf{since } \alpha\textbf{의 주기가 } a$$

$$= \beta(s(t)) \ = \beta(s)$$

그러므로 β**는 폐곡선이다.** ${}^{\forall}t, \alpha(t+a) = \alpha(s)$**인 최소의 양수가** a

이므로 ${}^{\forall}s, \beta(s+\ell) = \beta(s)$**인 최소의 양수도** ℓ**이다.** ■

[정의] 정칙곡선 $\alpha(t)$가 일대일 함수이거나, 주기 a인 폐곡선으로서,

($\alpha(t_1)=\alpha(t_2) \Rightarrow \exists$ 정수 n : $t_1 - t_2 = na$)를 만족하는 곡선

$\alpha(t)$를 **단순곡선**이라고 한다.

(참고)

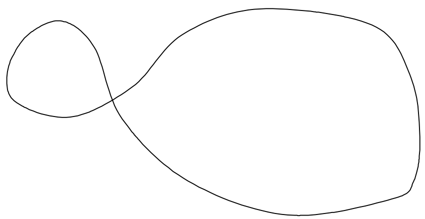
(1) 폐곡선이 아닌 정칙곡선으로 자신과 만나지 않으면 단순곡선이다.

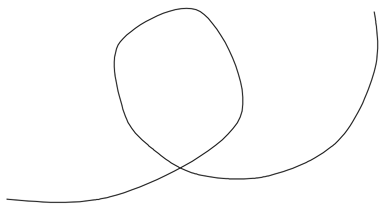
(2) 폐곡선인 정칙곡선으로 주기 a의 정수배에서만 자신과 만나면 단순곡선이다.

[예제]

(1) 원 $\beta(s)=(\cos(s),\sin(s))$, $s\in[0,2\pi]$는 길이가 2π인 단순폐곡선이다.

(2) 다음 그림의 곡선은 단순곡선이 아니다.





[정의] 단위속력 평면곡선 $\beta(s)$가 주기 ℓ인 폐곡선일 때, $\theta(s)$를 $\beta(s)$의 단위접벡터장 $\mathrm{t}(s)$가 x축 양의 방향에서 반시계방향을 (+)으로, 시계 방향을 (-)로 회전하는 각이라고 할 때,

$$m = \frac{1}{2\pi}(\theta(\ell) - \theta(0))$$

를 곡선 β의 회전수(rotation index)라고 한다.

[참고] 위에서 β의 회전수는 평면곡률 $k(s)$를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} k(s)ds$$

(증명) 접벡터 $\mathrm{t}(s)$가

$$\mathrm{t}(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

로 주어지므로, 곡률벡터 $\mathrm{t}'(s)$와 (우수계) 법벡터 $\mathrm{n}(s)$는 각각

$$\mathrm{t}'(s) = (-\sin(\theta(s))\,\theta'(s),\ \cos(\theta(s))\,\theta'(s))$$

$$\mathrm{n}(s) = (\,-\sin(\theta(s)),\ \cos(\theta(s))\,)$$

이므로 평면곡률은

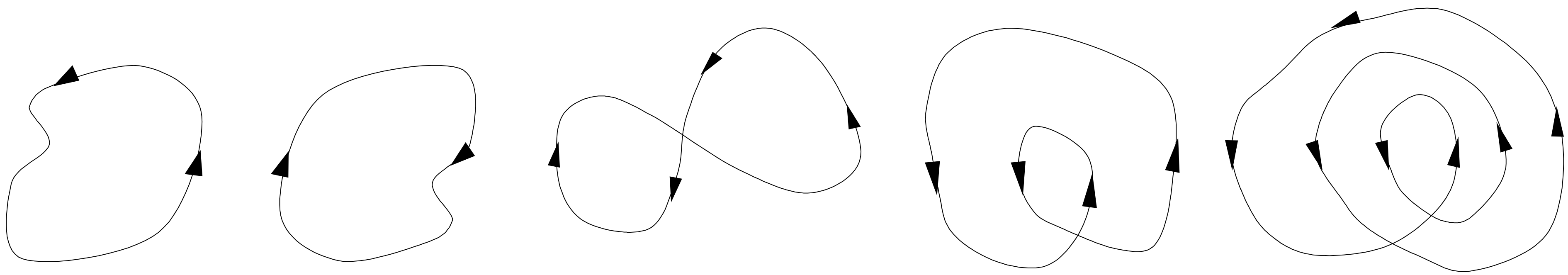
$$k(s) = \ <\mathrm{t}'(s), \mathrm{n}(s)> \ = \ \theta'(s)$$

이다. 따라서

$$m = \frac{1}{2\pi}(\theta(\ell) - \theta(0))$$

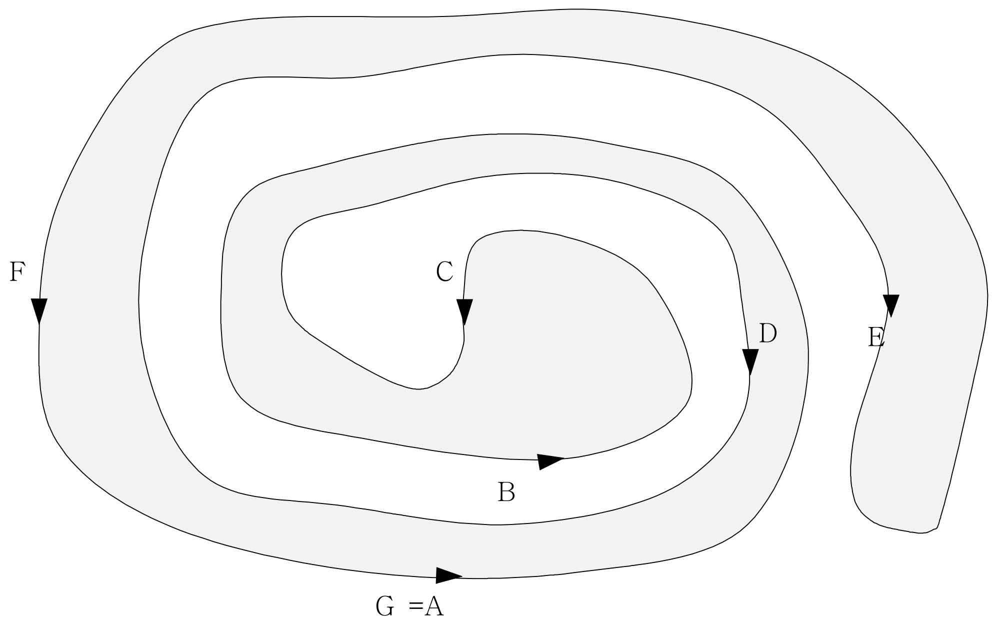
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} \theta'(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\ell} k(s)\,ds \qquad \blacksquare$$

[예제] 다음 폐곡선들의 회전수를 구하여라. $1,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3$



[정리] 평면위 단순폐곡선의 회전수는 ± 1 이다.

[예제] 다음 곡선의 회전수는 1 임을 보여라.



$A: 0$

$B: 2\pi$

$C: 2\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{2}\pi$

$D: \frac{7}{2}\pi - 2\pi = \frac{3}{2}\pi$

$E: \frac{3}{2}\pi - 2\pi = -\frac{1}{2}\pi$

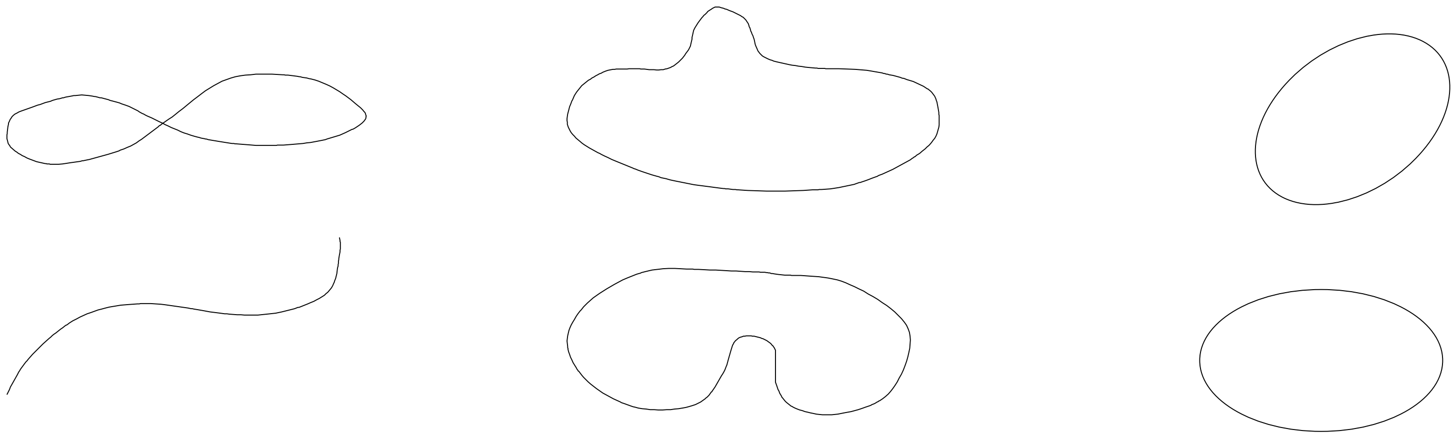
$F: -\frac{1}{2}\pi + 2\pi = \frac{3}{2}\pi$

$G: \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = 2\pi$

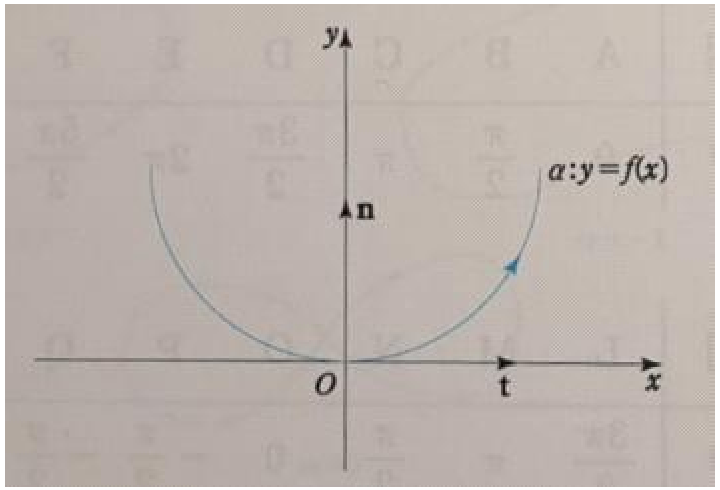
각도 2π 로 회전하였으므로 회전수는 1 이다.

[정의] 평면위의 단순폐곡선 α 위의 임의의 두 점을 연결하는 선분이 α 의 외부에 있지 않을 때, α 를 난형선(oval curve)라고 한다.

[예제] 다음 곡선 중에서 난형선은 어느 것인가?



[참고] 난형선 α 위의 임의의 점을 택하고 그 점에서 접벡터 t 를 x 축으로, 법벡터 n 를 y 축으로 설정하여 α 가 방정식 $y=f(x)$ 로 표시되었다면 각 점에서 $f''>0$ 이다.



[정의] 정칙 평면곡선 α에서 평면곡률이 극대 또는 극소가 되는 점을 정점(vertex)라고 한다.

[참고] 평면곡률 k가 미분가능한 함수이면 정점에서는 $k' = 0$이다.

[예제] 곡선 $\alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t))$는 타원이다. 이 타원 α는

$$t = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$$ **에서만 정점을 갖는다.**

[정리] (4개 정점의 정리) 난형선위에서는 적어도 4개의 정점이 있다.

(증명)

직선 부분이나 원에서는 곡률이 상수이므로 모든 점이 정점이다.

난형선 β는 원이나 직선 부분을 포함하고 있지 않다고 가정하자.

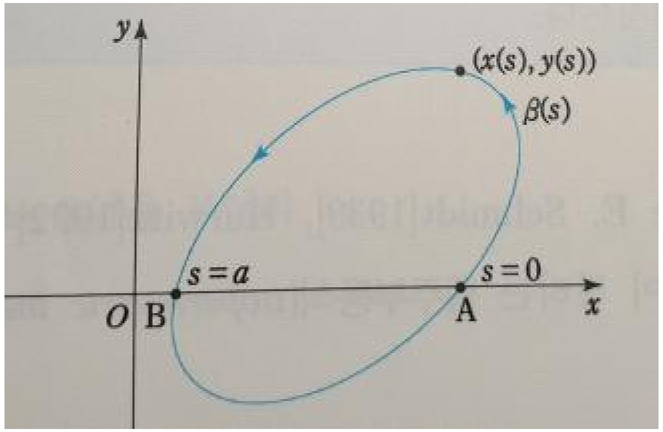
그러면 평면곡률 $k(s)$는 상수가 아닌 연속인 주기함수(주기는 β의 길이인 ℓ)이다. 따라서 $k(s)$가 최대와 최소가 되는 β위의 두 점 A, B가 존재한다. 점 A, B에서 $k'(s) = 0$이므로 A, B는 정점이다.

만약 A, B **외에 정점이 없다고 가정하고,** A**는** $\beta(0)$**,** B**는** $\beta(a)$**로 놓으면,**

$$k'(s) < 0,\ 0 < s < a$$

$$k'(s) > 0,\ a < s < \ell$$

A**와** B**를 연결한 직선을** x**축으로 하자. 단위속력곡선** β**가** $\beta(s) = (x(s),\ y(s))$**로 주어졌다고 하면,**



$$y(s) > 0,\ 0 < s < a$$

$$y(s) < 0,\ a < s < \ell$$

이므로

$$k'(s)\,y(s) < 0,\ 0 < s < \ell, s \neq a$$

이 된다. 한편

$$\mathrm{t}'(s) = k(s)\,\mathrm{n}(\mathrm{s})$$

$$n(s) = (-y'(s), x'(s))$$

$$\mathrm{t}'(s) = \beta''(s) = (x''(s),\ y''(s))$$

이므로

$$x''(s) = -k(s)y'(s)$$

또한 $y(\ell) = y(0),\ x'(\ell) = x'(0)$ **이므로**

$$\begin{aligned}\int_0^\ell k' y\, ds &= [ky]_0^\ell - \int_0^\ell k y'\, ds \\ &= 0 - \int_0^\ell x''\, ds \\ &= x'(\ell) - x'(0) = 0\end{aligned}$$

그런데 $k'y < 0)0 < s < \ell, s \neq a)$ **이므로** $\int_0^\ell k' y\, ds = 0$ **이어야 하므로 모순이다. 즉 정점은 3개 이상 존재한다. 그러나** k' **은 정점 좌우에서 부호가 바뀌므로 정점의 수는 짝수이어야 한다. 따라서 난형선 위에는 적어도** 4**개의 정점이 존재할 수 밖에 없다.** ■

[정리] α가 길이 ℓ인 평면위의 폐곡선이고, A를 α가 만드는 영역의 넓이라고 하면, $\ell^2 \geq 4\pi A$이다. 등호가 성립할 필요충분조건은 α가 원(circle)인 경우이다. 그러므로 정해진 길이의 곡선들 중에서 원이 최대 넓이의 영역을 만든다.

(참고) 이 정리는 **등주부등식**(isoperimetiric inequallity)로 불린다.

원의 경우 : $\ell^2 = (2\pi r)^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi(\pi r^2) = 4\pi A$

3.2 공간곡선의 대역적 이론

[정의] 정칙곡선 $\alpha : [0, \ell] \to \mathrm{E}^3$의 **전곡률**(total curvature)은 $\int_0^{\ell} \varkappa(s)\, ds$이다.

[참고] $\varkappa = \|\mathrm{T}'\|$이므로 α의 전곡률은 α의 단위접벡터장 T의 구면곡선

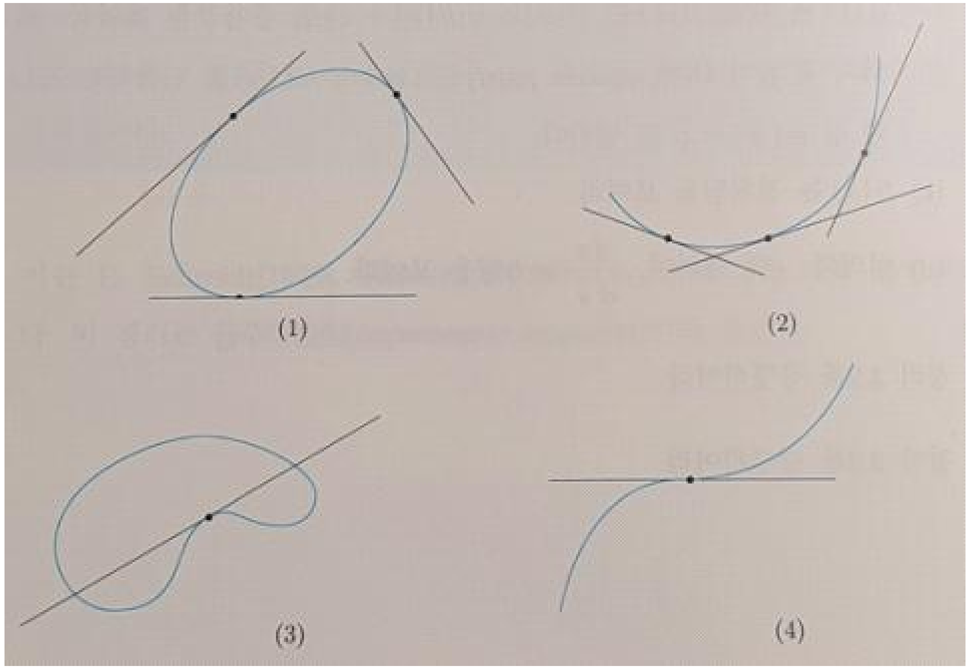
$$\gamma : [0, \ell] \to S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\gamma(s) = \mathrm{T}(s)$$

의 길이이다.

[정리] (Fenchel 정리) 공간곡선인 폐곡선 α의 전곡률은 $\int_0^{\ell} \varkappa(s)ds \geq 2\pi$ 이다. 등호가 성립할 필요충분조건은 α가 한 평면에 속하는 볼록곡선이다.

[참고] 정칙인 평면곡선 α가 각 접선의 한쪽에 놓여 있을 때, α를 볼록곡선(Convex Curve)라고 한다. 예를 들어 (1),(2)는 볼록곡선이나, (3),(4)는 볼록곡선이 아니다.



[예제] 타원 $\alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t), 0),\ (0 \le t \le 2\pi)$ **에서 Fenchel정리를 확인하여 보아라.**

(풀이) $s = s(t)$ **를 타원** α **의 호장함수이면,**

$$\int_0^{\ell} \varkappa(s)ds = \int_0^{2\pi} \varkappa(s(t))\frac{ds}{dt}dt = 4\int_0^{\pi/2} \varkappa(s(t))\frac{ds}{dt}dt$$

이고,

$$\alpha'(t) = (-2\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$\alpha''(t) = (-2\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\alpha' \times \alpha'' = (0,0,2)$$

$$\varkappa(s(t)) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}\right)^3}$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}$$

이므로

$$\int_0^{\ell} \kappa(s)ds = 4\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2(t)}{1+4\tan^2(t)}dt$$

이다. 여기에서 $u = 2\tan(t)$ **로 놓으면,** $du = 2\sec^2(t)\,dt$ **가 되므로,**

$$\int_0^{\ell} \kappa(s)ds = 4\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\tan^{-1}u\right]_0^a = 2\pi$$

타원은 xy **평면에 속하는 볼록곡선이다.** ■

[정의] 정칙곡선 $\alpha : [0, \ell] \to \mathrm{E}^3$ **의 전열률(total torsion)은** $\int_0^{\ell} \tau(s)\,ds$ **이다.**

[정리] S^2 **위의 단위속력 폐곡선의 전열률은** 0 **이다.**

제4장 곡면의 국소적 이론

4.1 다변수 벡터함수의 편도함수