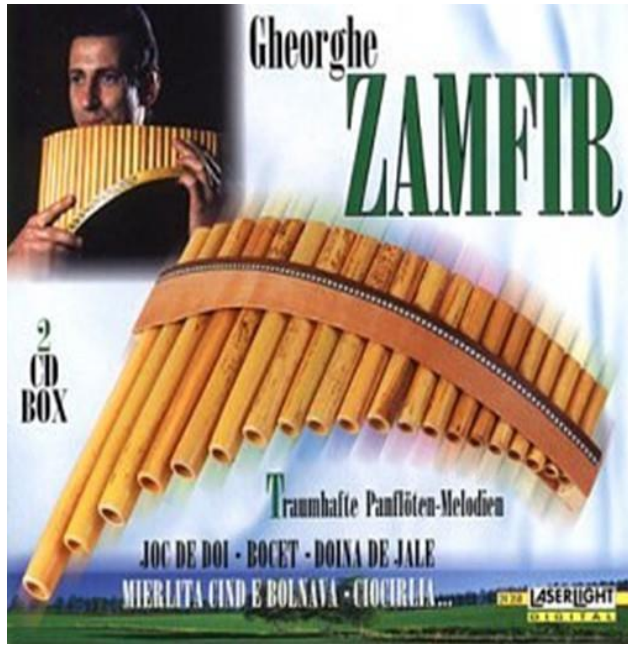




# 수학과 음악

한남대학교 수학과 김상배교수

## 신비한 음색 PanFlute



## Pan 과 Syrinx

장난기가 많은 **목양신 판**은 자신에게 소속된 님프들의 꿈무늬를 쫓아다녔는데, 그 중에서도 특히 아르카디아의 물의 정령인 **시링크스**에게 열을 올리고 있었다. 그러나 시링크스는 털투성이의 구애자가 견딜 수 없을 만큼 싫었다. 그러나 판은 님프를 라돈강의 강둑으로 몰아 넣는 데 성공했다.

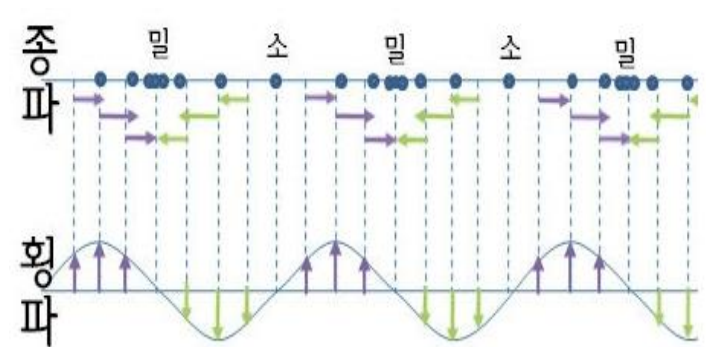
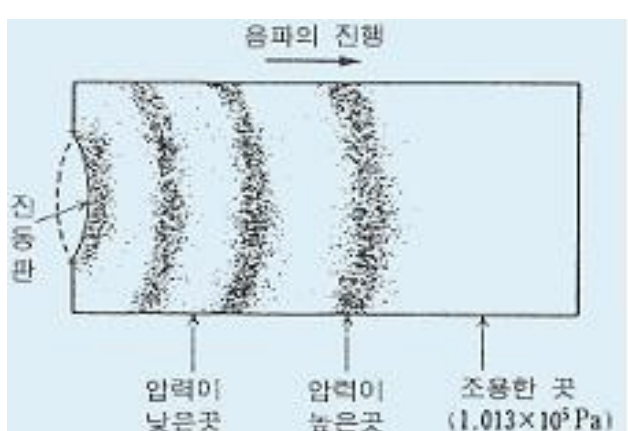
절망 상태에 빠진 시링크스는 언니들에게 자신을 눈에 띄지 않는 것으로 변하게 해달라고 부탁했다. 판이 그녀의 몸을 덮치자마자 시링크스는 변신을 하였고, 판은 님프 대신에 한 다발의 **갈대**를 안게 되었다. 그는 그 갈대로 **피리**를 만들어 불었다.



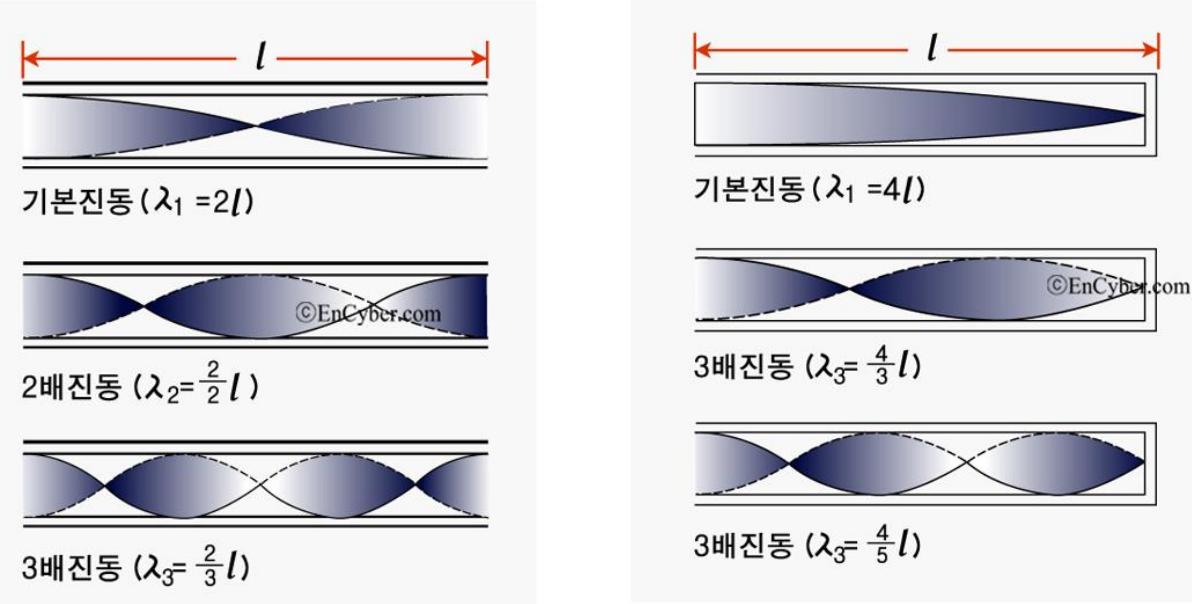
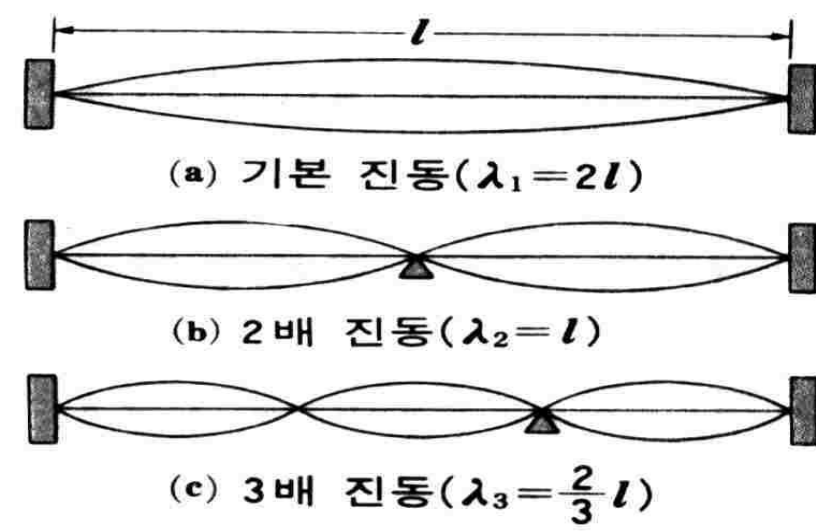
## 음파란 무엇인가?

**음파**란 물체의 진동이 균일하던 매질(공기)에 부분적으로 압력 변화를 일으켜서 종파의 형태로 고막을 **진동**시키는 것이다. 줄이나 물체의 진동이 임의의 방향으로 운동하고 있는 공기 입자들을 교란시켜서 부분적으로 압력이 높은 곳과 낮은 곳이 나타나게 된다. 그러면 압력 차에 의해 공기 입자들이 압력이 높은 곳에서 압력이 낮은 곳으로 이동하게 되어 음파는 퍼져 나가게 되고, 공기의 압력 변화가 사람들의 귀에 도달되면 고막을 진동시킨다. 줄이나 물체의 진동은 음파를 일으키는 원인은 될 수 있지만 음파는 아닌 것이다. 사람이 들을 수 있는 음파의 가청 주파수는 약 20~20000Hz이고, 주파수가 20Hz 이하의 음파는 초저주파, 20000Hz 이상의 음파는 초음파라고 한다

## 파동: 종파(음파)와 횡파(빛)



## 현 과 관의 진동



**폐관**에서의 파장은 **개관**에서의 파장보다 2배 길고 진동수는 반으로 줄어든다. 즉 폐관에서 나오는 소리가 한 옥타브 낮은 음이 된다

## 음계의 구성

12개 중에서 **도**와 **솔** 외에 몇 개를 더 사용해야 한다는 수학적 이유는 없지만 간단한 진동수비의 음정을 사용할수록 더 좋은 화음을 이룬다.

고대 그리이스의 피타고라스는 대장간에서 나는 소리를 듣고 아래와 같은 7개로 구성된 음계를 만들었다고 한다. 괄호 안은 진동수 비율인데 대장간의 소리내는 물건들의 질량비와 관계된다고 한다.

**피타고라스**는 진동수들의 정수비를 유지하는 **피타고라스율**을 만들었고

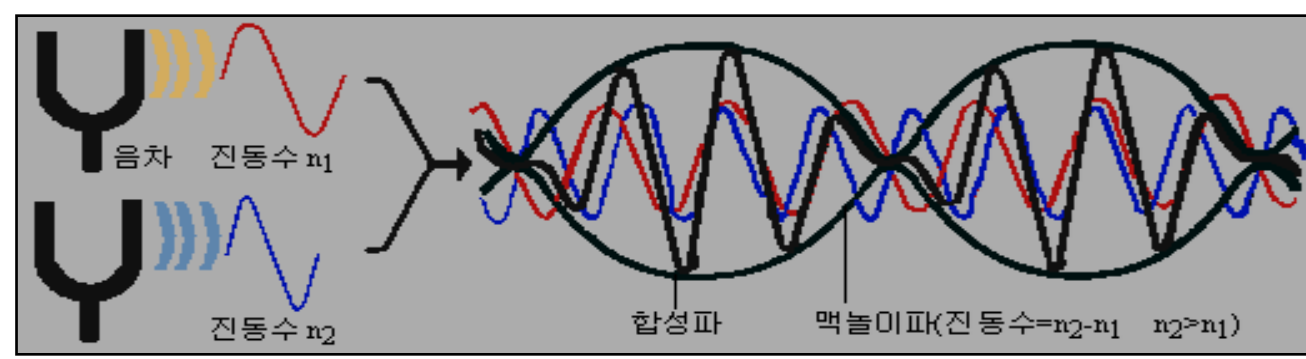
도(1) 레(9/5) 미(81/64) 파(4/3) 솔(3/2) 라(27/16) 시(243/128) 도(2)

**프톨레마우스**는 좀 더 간단한 진동수 비로 대치하여 **순정율**을 만들었다.

도(1) 레(9/5) 미(5/4) 파(4/3) 솔(3/2) 라(27/16) 시(15/8) 도(2)

위 두 가지 음계에서는 **미파** 사이와 **시도** 사이는 짧고 다른 사이들은 긴데 긴 음정 사이에 반음 들을 대강 집어 넣으면 12음이 된다.

## 맥놀이



진동수가 약간 다른 두 음파가 겹쳤을 때 생기는 진폭의 주기적 변화

1초간의 **맥놀이** 횟수 = 두 음파의 진동수의 차  
맥놀이 이용 : 범종의 독특한 음색, 악기의 **조율** 등

## 인간의 음정인식

인간의 귀가 느끼는 두 음의 차이인 **음정**은 **진동수 비**로 결정된다. 두 음의 진동수 비가 1:2 이 되면 1 옥타브 음정이라고 하며 공명이 가장 잘 되기 때문에 같은 계명으로 동일시한다.

두 음의 진동수 비가 2:3이 되면 "도" 와 "솔" 사이의 음정이 되는데 이 음정은 "**완전5도**"라는 음정으로 1 옥타브 음정 "**완전8도**" 다음으로 가장 아름다운 공명을 준다. 가온다(도)의 진동수는 약 262회이고 (솔)의 진동수는 (3/2)배인 392회이고 높은(도)의 진동수는 523회로 2배이다.

## 음계(음의계단)정하기

(도)와 (솔)을 포함하여 1 옥타브 내의 다른 음들을 계단식으로 10개 내외(m개)로 정해 보려면 m번 거듭제곱을 하면 2가 되고 n번 거듭제곱하면 3/2 가 되는 수( $x$ )를 찾아야 한다. 즉

$$x^m = 2, \quad x^n = 3/2, \quad 3/2 = x^n = (2^{1/m})^n = 2^{n/m}$$

인  $p=(n/m)$ 를 찾고 싶는데 **유리수** 중에는 그런 수 p를 찾을 수가 없다. 즉 p는 정수의 비로 나타낼 수 없는 **무리수**  $\log_2(3/2)$  이다. 그 수에 가까워 지는 **수열**은 3/5, 7/12, 24/41,.....

1 옥타브를 대강 5개로 나누면 3번째 음이 (솔)에 가깝고 12개로 나누면 7번째 음이 (솔)에 가깝고 41개로 나누면 24번째 음이 (솔)에 가깝게 된다.



## 평균율이란?

피타고라스음계나 순정율의 반음 간격들이 일정하지가 않아서 어떤 노래(멜로디)를 워나 아래로 평행이동(조옮김)을 하면 노래(멜로디)가 원래의 것과 달라지게 되는 불편한 점이 있다.

17세기 **메르센** 이라는 수학자가 **평균율**을 제안하였다. 즉 1옥타브를 **일정하게** 12개로 나누자는 것이다. 그러면 음 간격이 정수의 비가 되지 않고 정수비에 근사한 무리수의 비가 된다. 하지만 그런대로 인간의 귀에 정수비랑 비슷하게 들리기 때문에 오늘날에는 이 평균율이 보편화 되었고

특히 피아노는 이 평균율로 조율이 되어 있다. 한편 바이올린의 4 줄은

**솔 레 라 미**

각 줄 간에 완전5도(3/2 의 진동수 비율)로 조율이 되어 있어서 유리수 진동수 비를 갖고 있다고 볼 수 있다.

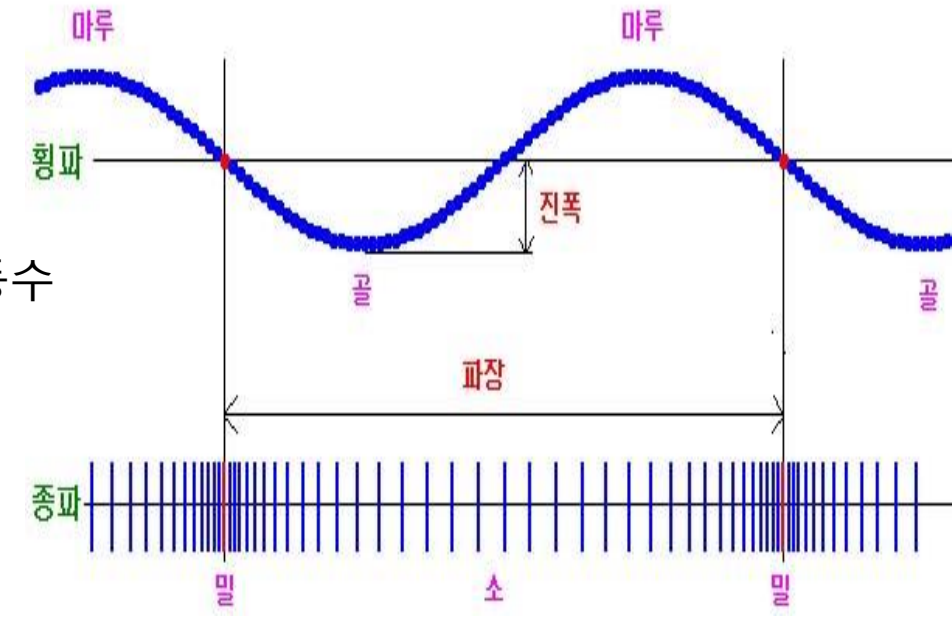
## 폐관의 길이 계산

소리의 속도: 340.0m = 331.5 m + 0.6 \* 15( 섭씨온도)

속도 = 파장 x 진동수  
파장 = 속도/ 진동수

(도)음의 파장 = 소리의 속도/진동수 = 340m / 523회 = 65cm

(도)음의 관의 길이 = 파장 / 4 = 16.2 cm



## 지수함수

등차 수열: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14  
등비 수열: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128

공비  $a = 2^{1/12} = 1.059463$

도, 도#, 레, 레#, 미, 파, 파#, 솔, 솔#, 라, 라#, 시, 도  
진동수:  $1, a^1, a^2, a^3 \dots a^7 \dots a^{12} = 2$

지수함수  $f(x) = Aa^x = 16.2 \times (1/2)^{12x}$

## 음악이란

**라이프니츠** (철학자, 뉴턴과 더불어 미분적분학의 창시자)

" **음악이란** 인간의 영혼이 쉼을 하는 것을 인식하지 않은 채 **쉼을 하면서 느끼는 기쁨**이다"