무리수
수의 세계를 완성하다

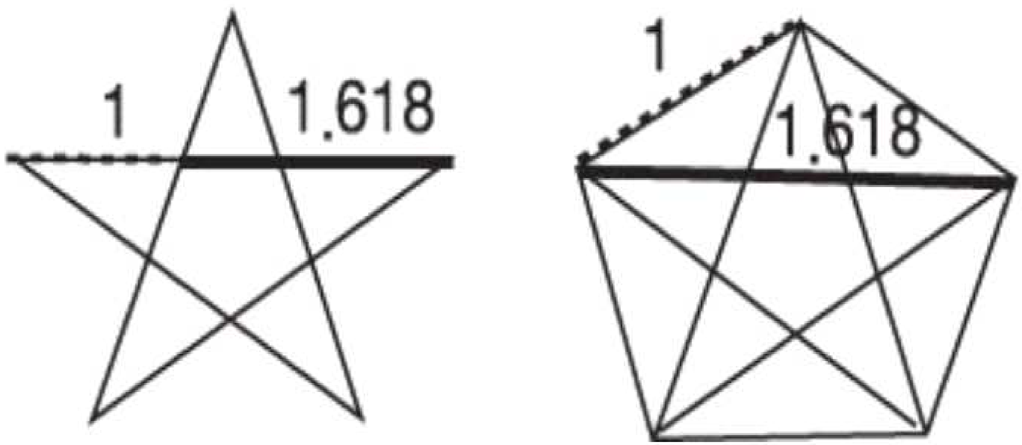
한남대학교 수학과
김상배 교수

피타고라스 학파의 비밀

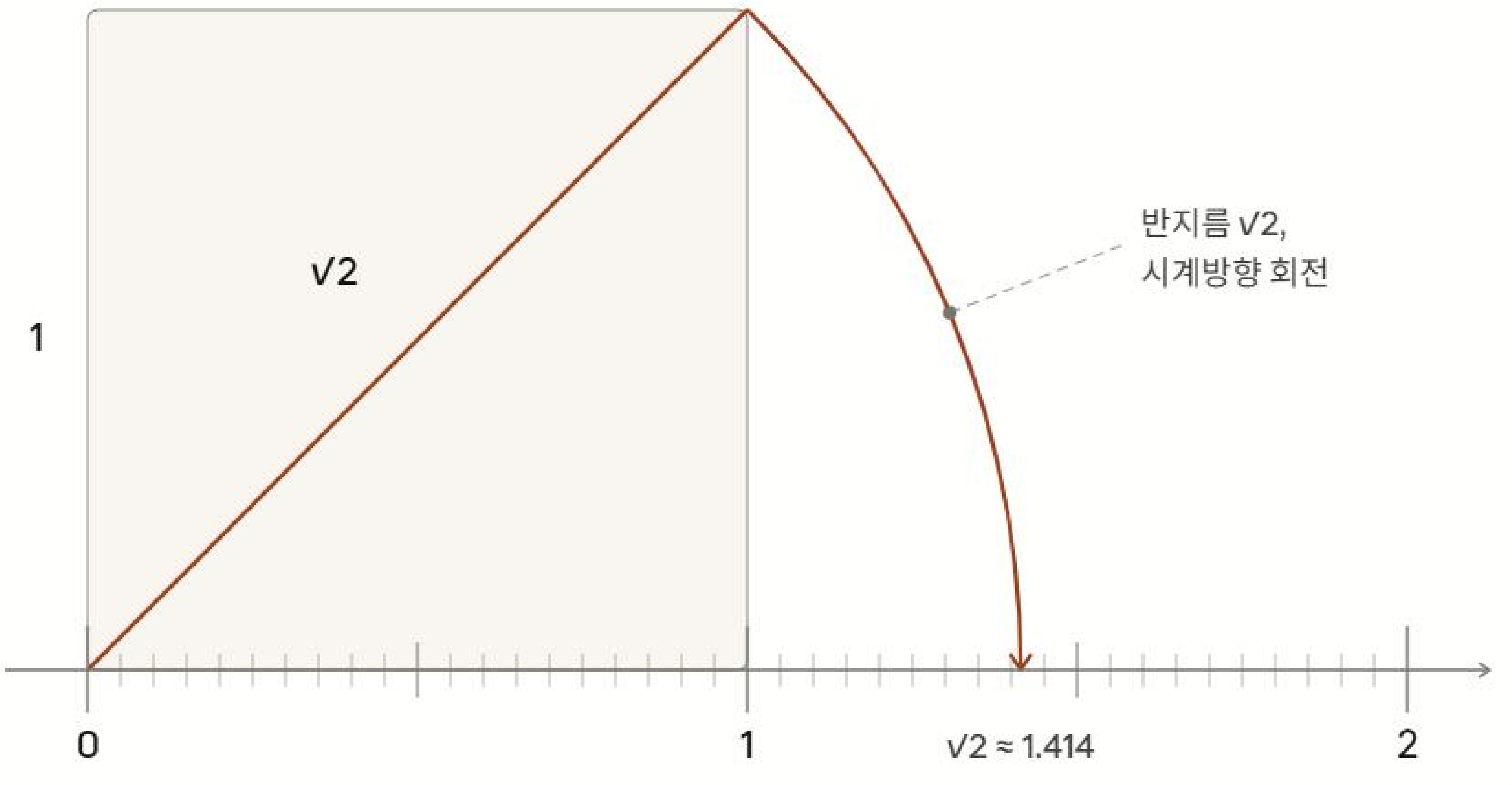
- 피타고라스 학파는 ‘만물은 수(數)로 이루어져 있다’고 믿은 고대 그리스의 수학이자 종교 공동체였습니다. 그들은 금욕적인 채식 생활과 영혼 윤회를 신봉하며, 철저한 비밀주의를 바탕으로 기하학과 수론의 발견들을 이어갔습니다.

- 피타고라스 학파는 세상의 모든 이치를 '정수(분수)'로만 설명할 수 있다고 믿었습니다. 그러나 피타고라스 정리를 통해 직각삼각형의 두 변이 1일 때, 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$ 가 된다는 사실을 발견했습니다. $\sqrt{2}$ 는 어떤 분수로도 나타낼 수 없는 수, 즉 무리수였습니다. 학파의 근간을 뒤흔드는 이 '불편한 진실'을 제자 히파수스가 외부에 누설하자, 학파의 동료들은 그를 배신자로 낙인찍고 바다에 빠뜨려 수장시켰다는 전설이 내려옵니다.

• 피타고라스 학파는 정오각형 안에 그려진 별(펜타그램)을 그들만의 신성한 상징으로 삼았습니다. 이 기호는 우주의 조화와 건강을 상징했으며, 학파의 구성원임을 확인하는 '비밀 표식'으로도 사용되었습니다. 이 도형 안에는 오늘날 황금비라 불리는 완벽한 비율이 숨겨져 있습니다.



유리수와 무리수의 개념



$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \left(\frac{1}{m}\right) n$ **가 될 수 없다. (설명필요)**

실수의 소수 표현

소수의 표현은 사용하는 진법(base) 에 따라 달라지며, 특정 진법에서 무한소수인 수가 다른 진법에서는 유한소수가 될 수 있다.

10진법 : $\frac{1}{3} = \frac{3}{10^1} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = 0.333\cdots_{(10)}$, $\frac{4}{9} = 0.444\cdots_{(10)}$

3진법 : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1} = 0.1_{(3)}$, $\frac{4}{9} = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} = 0.11_{(3)}$

즉, 어떤 수가 무한소수인지 유한소수인지의 여부는 수학적 본질이 아니라 그 수를 관찰하는 '진법의 체계' 에 의해 결정되는 상대적인 현상이다.

유한소수도 뒷부분에 0 을 무한히 붙이거나 아래 같은 방법으로 모두 무한소수로 볼 수 있다.

예) $1 = 1.000\cdots = 0.999\cdots$

$3.25 = 3.25000\cdots = 3.24999\cdots$

한남대학교 수학과 김상배교수

조밀하지만 연속적이지는 않은 유리수의 세계

유한소수도 무한소수로 볼 수 있으므로 실수는 다음 2가지로 분류된다.

1) 유리수 : 정수의 비로 나타낼 수 있는 수 = 순환무한소수

2) 무리수 : 정수의 비로 나타낼 수 없는 수= 비순환무한소수

유리수(Rational Number) 이름의 유래 : '이성적인 수'가 아니라 원래 Ratio(비율)에서 온 말, 즉 '비율로 나타낼 수 있는 수(분수)'

유리수의 조밀성: 유리수는 아무리 쪼개도 그 사이에 또 다른 유리수가 무한히 많다. (예: 0과 1 사이, 0.1과 0.2 사이...)

수직선의 딜레마: "그럼 유리수만으로 수직선을 꽉 채울 수 있을까?" No!

유리수를 아무리 빽빽하게 채워도 수직선에는 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$ 같은 무리수 자리에 '미세한 구멍'들이 무한히 많이 뚫려 있습니다. 심지어 무리수가 유리수보다 확실히 많다는 것을 증명할 수 있습니다.

무리수 $\sqrt{2}$ 의 증명

(증명) $\sqrt{2}$ **를 유리수로 가정**

$\Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{b}{a}$ **(**a, b **는 서로소인 정수)**

$$\Rightarrow 2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$\Rightarrow 2a^2 = b^2$ **그러므로** 2 **는** b **를 나눈다.** $b = 2k$ **(**k **는 정수)**

$$\Rightarrow 2a^2 = (2k)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 4k^2$$

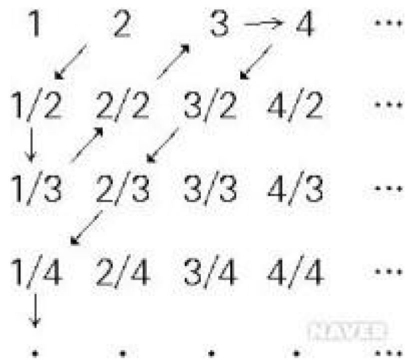
$\Rightarrow a^2 = 2k^2$ **그러므로** 2 **는** a **를 나눈다**

2 **가** a **도 나누고,** b **도 나누므로,** a, b **는 서로소가 아니다!!** ■

유리수와 무리수의 개수 비교

[정리] 유리수 전체의 집합 $\mathbb{Q}$ 는 자연수 집합과 대등하다.

(증명) 양의 유리수 전체를 다음과 같이 배열한다.



이것에서 화살표 방향의 순서대로 열을 만들면, 양의 유리수 전체는

$$\left\{1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ 3,\ 4, \cdots\right\}$$

로 나열할 수 있고, 여기에서 중복되는 것은 빼도 된다. 따라서 양의 유리수 전체는 자연수 집합 $\mathbb{N}$ 과 대등함을 알 수 있다. ■

[정리] 실수 집합 R 은 자연수집합과 대등하지 않다. (대각선논법)

(증명) 개구간 $(0,1)$ 에 속하는 모든 수는 $0.x_1x_2x_3\cdots$ 와 같은 무한소수로 나타낼 수 있다. 만약 $(0,1)$ 이 자연수집합과 대등하다면

$$(0,1)=\{a_1,a_2,a_3,\ \cdots\}$$

와 같이 수열로 나타낼 수 있다면

$$1\rightarrow a_1=0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$

$$2\rightarrow a_2=0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

$$3\rightarrow a_3=0.\,a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$$

. . . . . .

에서 모든 i 에 대하여 $b_i=\begin{cases}0 & \text{if } a_{ii}\neq 0\\ 1 & \text{if } a_{ii}=0\end{cases}$ **로 만든 실수**

$b=0.b_1b_2b_3\cdots$ **은 구간 $(0,1)$ 에 속하지만 각 i 에 대하여 $b\neq a_i$ 이다.**

그러므로 구간 $(0,1)$ 은 자연수집합과 대등하지 않다. ■

복리계산에 나오는 신기한 무리수 e

원금 1억 / 연이율 6% 복리 비교

이자 지급 주기	계산 방식	1년 뒤 원리합계	실제 연수익률
연 1회 (연복리)	$1억 \times (1+0.06)^1$	**106,000,000원**	6.000%
연 4회 (분기복리)	$1억 \times \left(1+\frac{0.06}{4}\right)^4$	**106,136,355원**	6.136%
연 12회 (월복리)	$1억 \times \left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12}$	**106,167,781원**	**6.168%**
연 365회 (일복리)	$1억 \times \left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365}$	**106,183,131원**	6.183%
무한히 (연속복리)	$1억 \times e^{0.06}$	**106,183,654원**	6.184%

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^{\frac{n}{0.06}}\right]^{0.06} \to e^{0.06}$$

한남대학교 수학과 김상배교수

미분하면 자신이 되는 함수 $f'(x)=f(x)$

$(a^x)' = a^x$ 이 되는 a 찾기

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= a^x\left(\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\right) = a^x(1) = a^x$$

여기서 $\dfrac{a^h-1}{h}=1 \iff a^h-1=h$

$$\iff a^h = 1+h$$

$$\iff a = (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

여기서 $h\to 0 \Rightarrow a\to e$ **임을 알고 있으므로** $a=e$**로 놓으면**

$$h\to 0 \ \Rightarrow \frac{e^h-1}{h}\to 1$$ **(힌트: $e^h-1=t$로 치환)**

을 증명할 수 있다. 그러므로, $a=e$일 때 $(e^x)'=e^x$ 이 된다.

변화율이 원래함수에 비례하는 함수

$$y'(x) = k\,y(x)$$ **이면**

이 미분방정식의 해는 $y(x) = A\,e^{kx}$ **(** A**는 상수)임을 보일 수 있다.**