미분적분의 원리

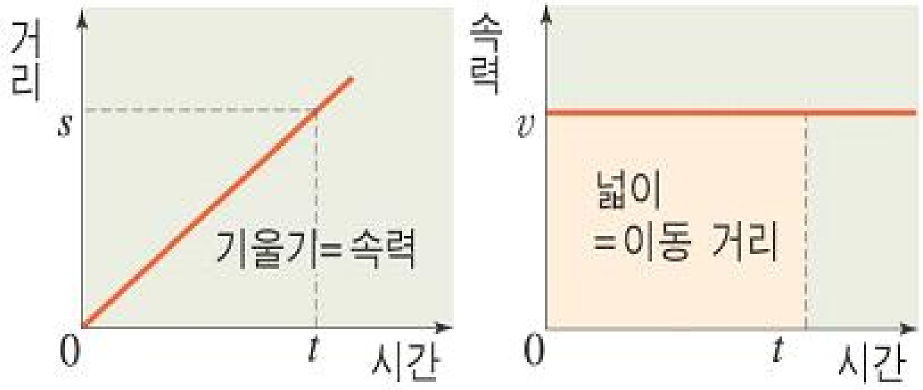
한남대학교 수학과

김상배 교수

sbk@hnu.kr

http://sbk.hnu.kr

미분과 적분이란?



함수(변화) : 두 변수 사이의 관계

t (시간) $\longrightarrow$ s (거리)

독립변수　　종속변수

미분(변화율) : 속력= $v = \dfrac{s}{t}$ **= 거리/시간 : 나누기　기울기=높이/밑변**

적분(변화량) : 거리= $s = vt$ **= 속력×시간 : 곱하기　면적=높이x밑변**

[보기] 미분:적분 $\Longrightarrow$ **변화율:변화량**

$\Longrightarrow$ **기울기:높이, 높이:면적**

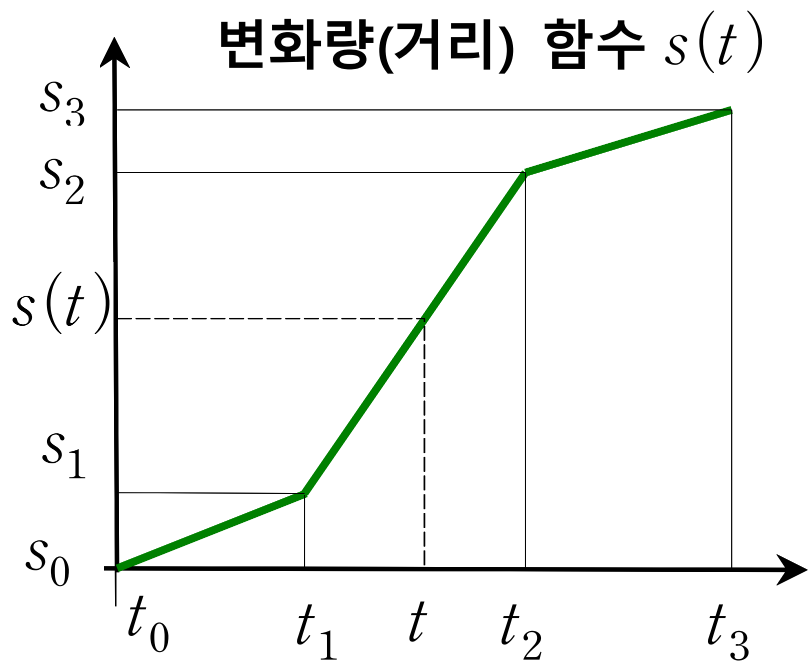
$\Longrightarrow$ **속력:거리, 유속:수량, 전력:전력량, etc**

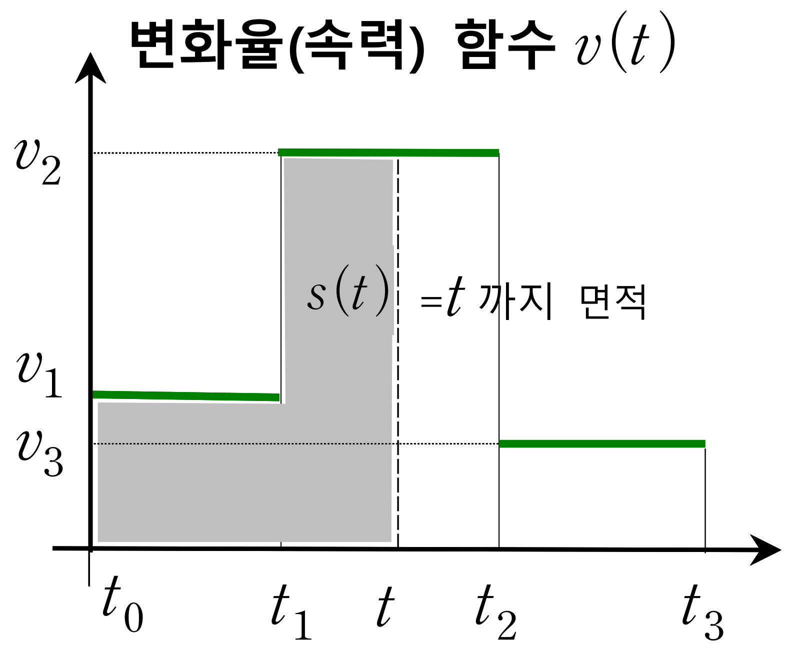
미적분학의 기본정리 = "미분과 적분은 반대되는 연산이다"

위 그림의 경우 속력 v가 일정한 경우인데, 변하는 경우를 알아보자.

한남대학교 수학과 김상배교수

"구간별" 변화율 v (구간으로 쪼개어 생각)



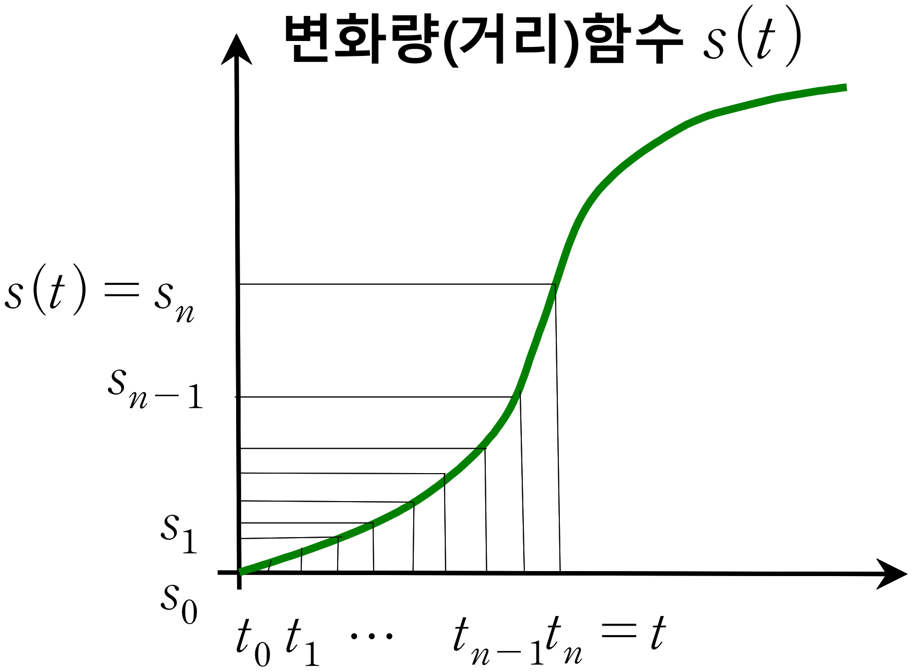


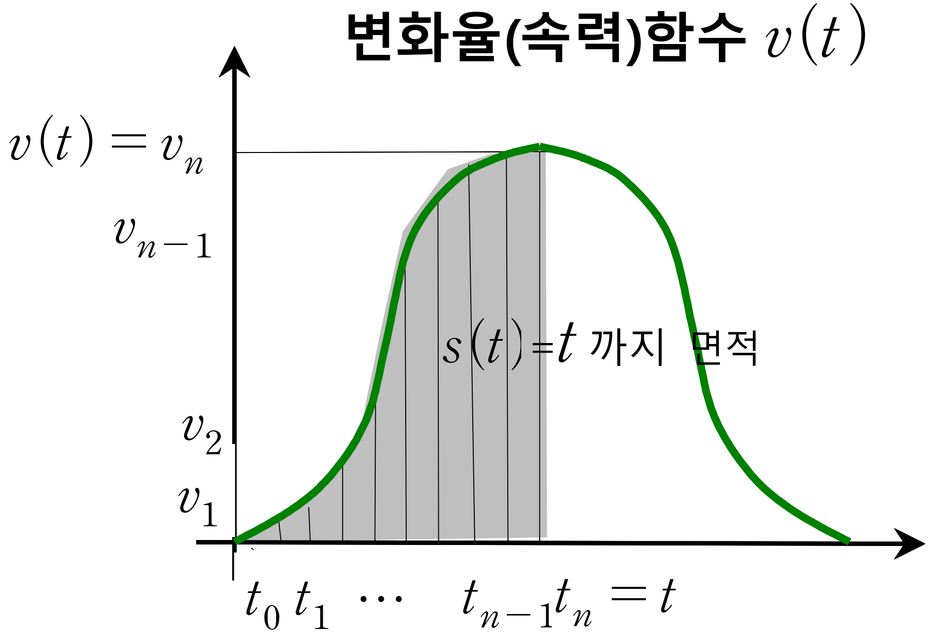
미분 : **변화율**(t) = **구간거리/구간시간** = **기울기** = $v(t)$

$$v_1 = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0},\quad v_2 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},\quad v_3 = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2}$$

변화량 $s(t)$**를 미분(구간거리/구간시간)하면 변화율** $v(t)$**가 된다.**

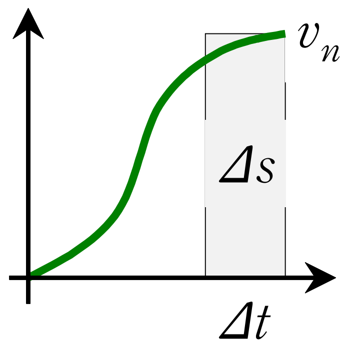
순간 변화율 v (무한히 쪼개어 생각)





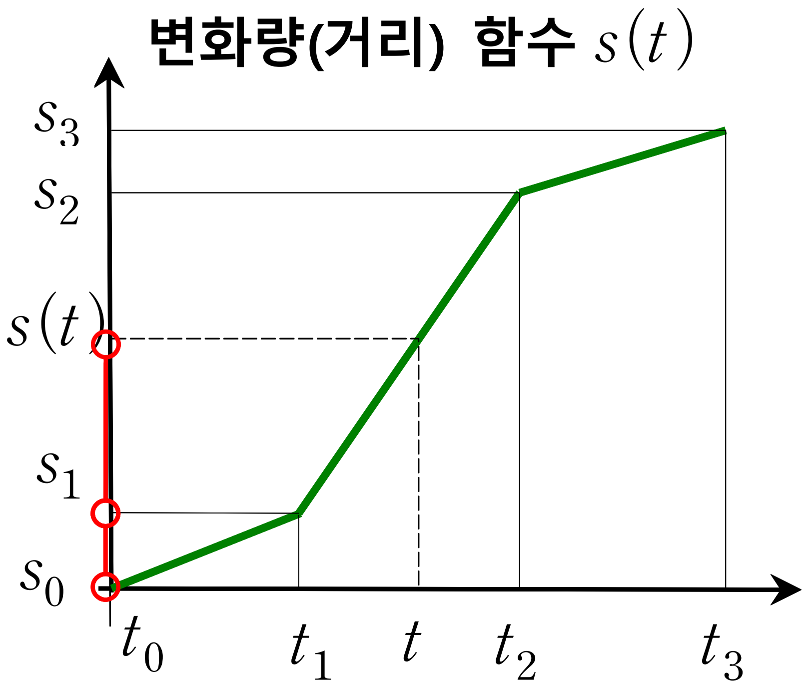
미분 : 변화율(t) = 순간거리/순간시간 = 순간속력

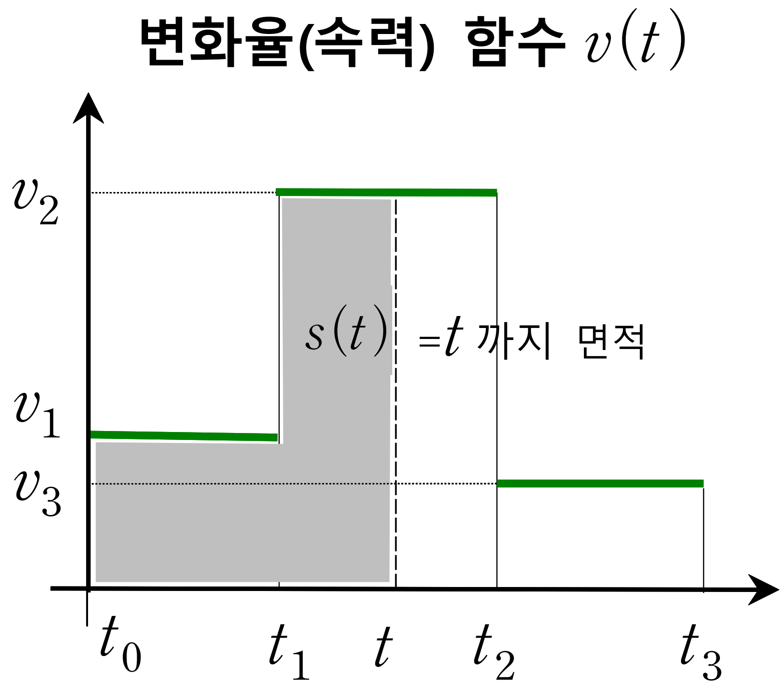
$$= v(t) = v_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



변화량 $s(t)$를 미분($t_{n-1} \longrightarrow t_n$:극한개념)하면 변화율 $v(t)$가 된다.

"구간별" 변화량 합산





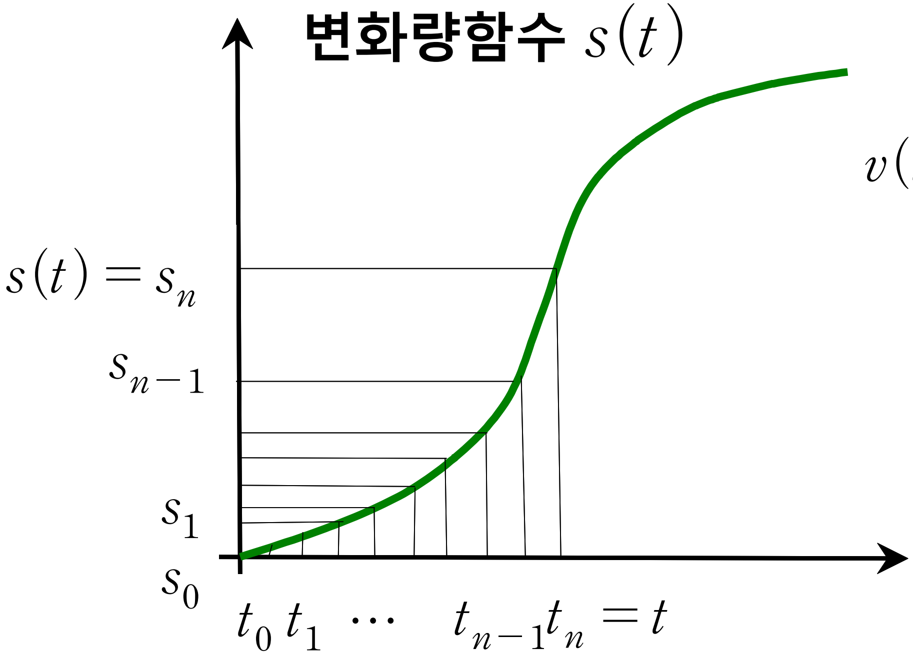
적분 : 총변화량 = 구간변화들의 총합

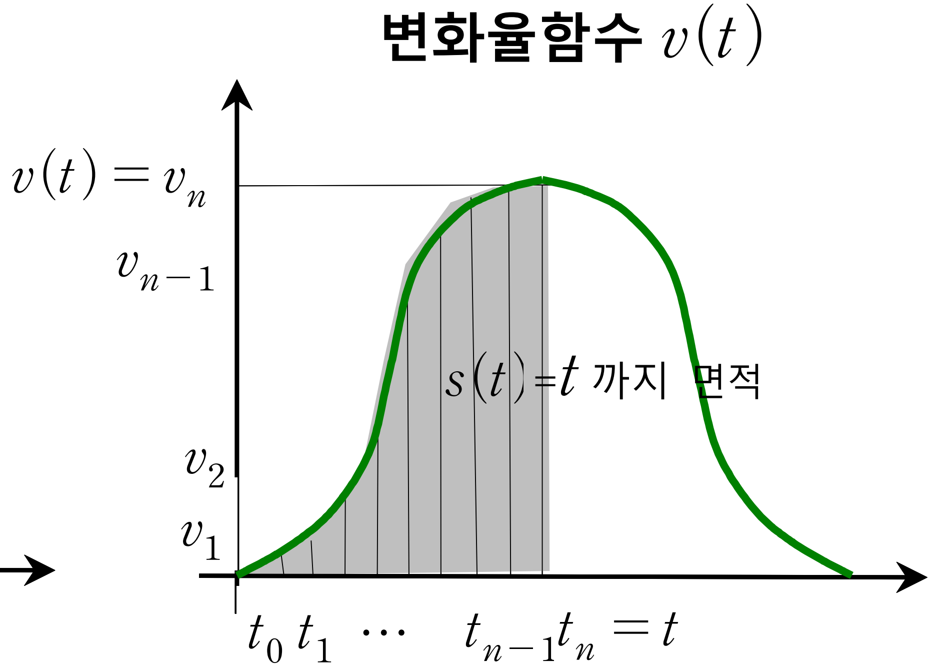
$$= v_1(t_1 - t_0) + v_2(t - t_1)$$

$$= (s_1 - s_0) + (s(t) - s_1) = s(t) - s_0$$

적분(작은 변화 $v(t)(t - t_i)$들의 합)하면 총변화량 $s(t) - s_0$가 된다.

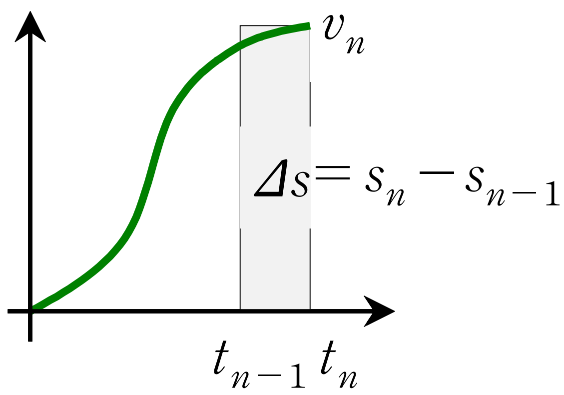
총 변화량 (무한히 쪼갠 작은변화량의 총합)



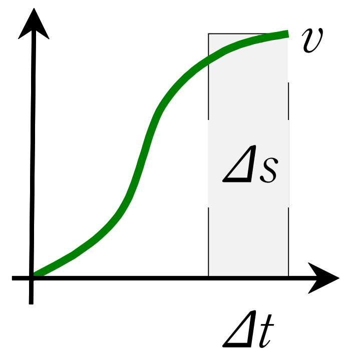


적분 : 총변화량 = 무한히 작은 변화량들의 합

$$
\begin{aligned}
s(t) &= v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + \cdots + v_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) \\
&= s_n - s_0 = s(t) - s_0
\end{aligned}
$$



적분(무한소변화 $v(t)\,dt$의 무한합. $n \rightarrow \infty$) 하면 총변화량 $s(t)$가 된다.



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta s = v\,\Delta t$$ (나눗셈(미분)과 곱셈(적분))

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} v\,\Delta t_i$$ (적분은 구간별 값을 더함)

$$\Leftrightarrow s(t) - s(t_0) = \sum_{i=1}^{n} v\,\Delta t_i$$ (중간은 상쇄되고 양끝점만 남는다.

해석학의 탄생 : 무한히 쪼개서 나눈다.

무한히 쪼개서 곱한 것을 모두 더한다.

미분과 적분에서 구간들을 무한소구간(극한개념)으로 줄인다.

$$v = \frac{ds}{d\tau} \Leftrightarrow ds = v\,d\tau$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$ (Σ와 S의 구별)

$$\Leftrightarrow s(t) - s(a) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$ (τ와 t 의 구별)

그러므로 $v = \dfrac{ds}{d\tau} \Leftrightarrow s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + s(t_0)$

(위 관계 $\Leftrightarrow$ 이 미적분학의 기본정리이다.)

“미적분학의 기본정리”의 의미

$$v = \frac{ds}{d\tau} \Leftrightarrow s(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau + s(t_0)$$

v는 s의 변화율함수 $\Leftrightarrow$ s는 v의 변화량함수 | 변화량(t 고정)

(=도함수) (=부정적분) (=정적분)

(1) 미적분학의 제1기본정리 ($\Longleftarrow$)

변화율 $v(t)$ 함수를 **적분**한 변화량 $s(t)$ 함수를

미분하면 원래의 변화율 $v(t)$ 함수가 된다.

(2) 미적분학의 제2기본정리 ($\Longrightarrow$)

변화량 $s(t)$ 함수를 **미분**한 변화율 $v(t)$ 함수를

적분하면 원래의 변화량 $s(t)$ 함수가 된다.

(단, 상수 $s(t_0)$ 만큼의 차이 발생)

도함수(변화율) 예제(1)

$$f(x) = x^2 - 2$$

x 의 변화 : $\Delta x = x - x_0$

f 의 변화 : $\Delta f = (x^2 - 2) - (x_0^2 - 2) = x^2 - x_0^2$

구간변화율 : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \dfrac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = x + x_0$

순간변화율 : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = x + x_0 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0 + x_0 = \dfrac{df}{dx}$

$$2x_0 = f'(x_0)$$

그러므로 도함수 $f'(x) = 2x$ 이다.

도함수(변화율) 예제(2)

$$f(x) = e^x$$

구간변화율 : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)$

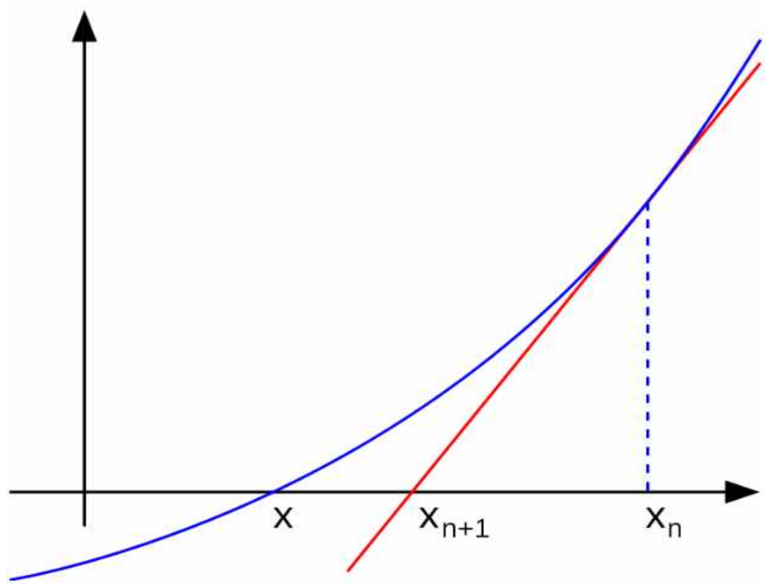
순간변화율 : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = e^x\left(\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} e^x = \dfrac{df}{dx}$

그러므로 도함수 $f'(x) = e^x$ **이다.**

위에서 $e^{\Delta x} - 1 = t$ **로 치환하면 (** $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$ **)**

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{t}{\ln(t+1)} = \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(\mathrm{t}+1)} = \frac{1}{\ln(\mathrm{t}+1)^{\frac{1}{\mathrm{t}}}} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln e} = 1$$

Newton의 방정식의 근사해법



뉴튼법은 방정식 $f(x)=0$ 에서의 함수 f 가 미분가능할 때, 사용할 수 있는 수렴이 빠른 방정식이 수치해법이다. 초기 추측 x_0 에서 시작하여 n 단계의 해의 근사값 x_n 이 주어졌을 때, $(n+1)$ 단계의 근사값 x_{n+1} 은 x_n 에서의 접선이 x 축과 만나는 지점이다.

x_n 에서의 접선의 방정식

$$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$$

이 점 $(x_{n+1},0)$ 을 만족하므로

$$0=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+f(x_n)$$

이 성립하고 x_{n+1} 을 구하면,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

[예제] 뉴튼법으로 $\sqrt{2}$ 의 근사값을 구하여라.

(풀이) $f(x) = x^2 - 2$ **일 때** $\sqrt{2}$ **는 방정식** $f(x) = 0$ **의 근이다.**

$f'(x) = 2x$ **이므로 뉴톤의 반복식은**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Newton방법 알고리즘

입력 : x_0, X, N

For $i = 0$ **to** N

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

if $|x_{n+1} - x_n| \le X$ **then stop**

미분방정식 문제

[예제] 방사성원소의 붕괴 속도는 현재 남아 있는 양에 비례한다. 세슘137의 반감기는 30년이다. 현재 100g인 세슘이 10g이 되려면 몇 년이 걸릴까?

(풀이) t 년 후의 세슘의 양을 $s(t)$ 라고 하면 붕괴속도는 $\dfrac{ds}{dt}$ 이다. $\dfrac{ds}{dt}$ 는 $s(t)$ 에 비례하므로 $\dfrac{ds}{dt} = -\lambda s(t)$ (λ는 비례상수). 변화율에 마이너스 기호가 붙은 것은 t 의 증가에 따라 $s(t)$ 가 감소한다는 뜻이다. $\dfrac{ds}{dt} = -\lambda s(t)$를 만족하는 함수는

$$s(t) = A e^{-\lambda t}$$ 이고,

현재 $100\mathrm{g}$ 이라는 뜻은 $s(0) = 100$ 즉 $A = 100$ 이고, 반감기가 30 년이면

$A e^{-\lambda 30} = s(30) = \dfrac{1}{2} A$ 이 되므로 $e^{-\lambda 30} = \dfrac{1}{2}$ 즉 $\lambda = \dfrac{\ln 2}{30}$ 따라서

$s(t) = 10$ 이 되려면 $s(t) = A e^{-\lambda t}$ 에서 $t = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(10/\mathrm{A})$ 이므로

$$t = -(30/\ln 2) \ln(10/100) \approx 100$$

약 100 년이 걸린다.

준비물

우드락 (10cm x 15 cm) 3개

모눈종이(10cm x 15 cm) 3개

마분지 (10cm x 10 cm) 1개

노랑PVC필름(10cm x 10 cm)

고무밴드 4개

압정 10개, 빨간실 50cm,

싸인펜, 빨간색연필