

# 수학과 미술

## (피보나치 수와 황금비)

한남대학교 수학과  
김상배 교수

## 피보나치 수와 황금비

- 왜 소라 껍데기는 특정한 모양으로 커질까?
- 왜 해바라기 씨앗은 나선형일까?
- 왜 사람들은 어떤 직사각형을 더 아름답다고 느낄까?



여기서 공통적으로 나타나는 것이 피보나치 수와 황금비이다.

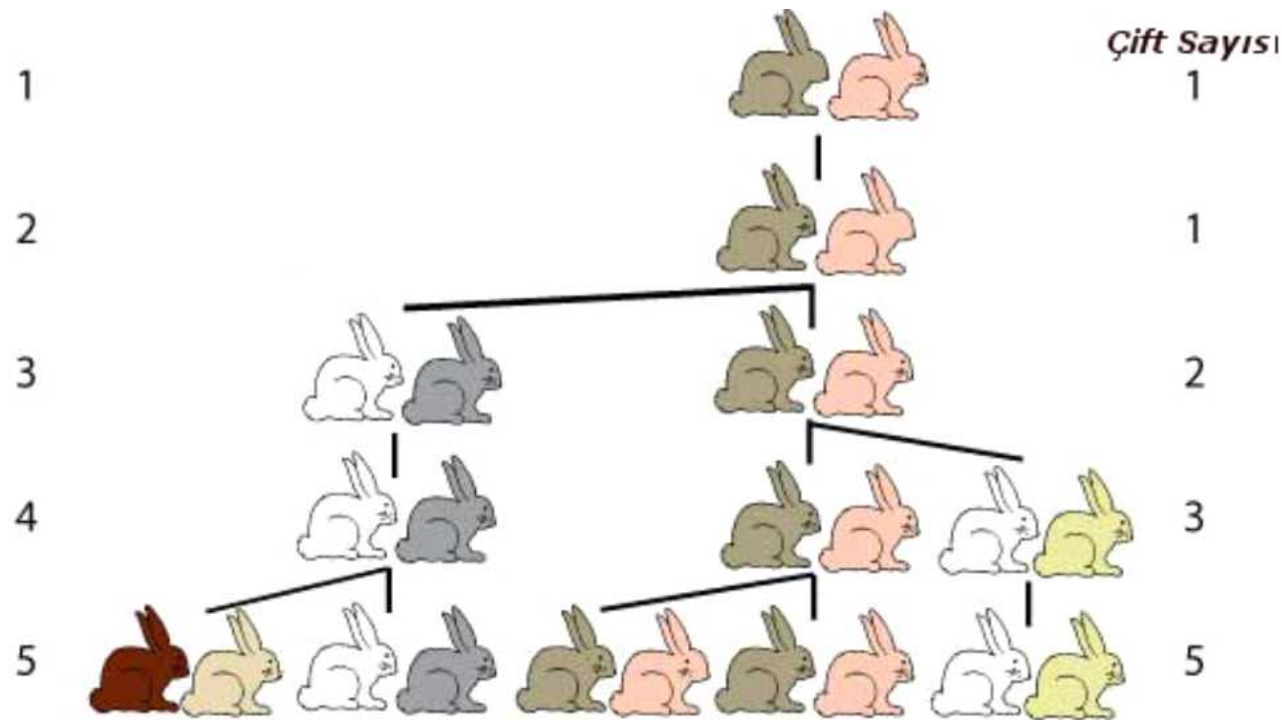
자연계에는 일반적으로 인식하지 못했던 여러 가지 법칙이 존재한다. 그 중에서도 우리 주변에서 살고 있는 여러 꽃들의 꽃잎 수(數)를 세어보면 신비로운 규칙을 발견하게 된다. 그러한 자연의 수학적이고 기하학적인 법칙이 '피보나치 수열 (Fibonacci Sequence)'이다. 이 수열은 12세기 말 이탈리아 수학자 레오나르도 피보나치 (Leonardo Fibonacci / 1170~1250년)가 제안했다. 그는 이탈리아의 수학자로, 아라비아에서 발달한 수학을 섭렵하여 이를 정리, 소개함으로써, 유럽 여러 나라의 수학을 부흥시킨 결정적인 인물이었다.

피보나치는 어느 날 집에서 기르던 토끼가 새끼를 번식하는 과정을 보면서 다음과 같은 문제에 관심을 갖게 됐다. '한 농장에서 갓 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 사육됐다고 가정하자. 새로 난 토끼 1쌍은 두 달 뒤부터 매달 암수 새끼 1쌍을 낳는다면, 1년 동안 토끼는 암수 몇 쌍으로 불어나는가?'

(풀이) 먼저 1개월 및 2개월 동안은 토끼 1쌍이 그대로 있고 셋째 달에 암수 새끼 1쌍을 낳았기 때문에 총 암수 2쌍이 된다. 넷째 달에 암수 어미 한 쌍이 또 암수 1쌍을 낳아 총 3쌍이 되고, 다섯째 달에는 어미가 또다시 1쌍을 낳고, 새끼도 어른이 되어 1쌍을 분만해 총 5쌍이 된다. 매달 암수 쌍의 수를 수열로 나열하면

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 . . .

이 되는데 이것이 피보나치 수열이다.



## 피보나치 수열 만들기와 황금비

처음 1 과 1을 주고, 앞의 수 2개를 더하여 새로운 수를 만들어 나간다.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 . . .

이 수열의 비율을 계산해 보자.

$$2/1 = 2$$

$$3/2 = 1.5$$

$$5/3 = 1.67$$

$$8/5 = 1.6$$

$$13/8 = 1.625$$

$$21/13 = 1.615$$

점점 1.618에 가까워진다. 이 값이 바로 **황금비**  $\phi = 1.6180339\dots$  이다.

## 황금비 계산하기

피보나치 수열  $x_1, x_2, x_3, \dots$ 에서 황금비는 근접 항들의 비의 극한이므로

$$\frac{x_2}{x_1} = \phi = \frac{x_3}{x_2}$$

이 되고, 처음 식에서 나온  $x_2 = \phi x_1$ 을 두 번째 식에 대입하면

$$x_3 = \phi x_2 = \phi(\phi x_1) = \phi^2 x_1$$

여기에서, 피보나치 수열의 정의에 따라  $x_1 + x_2 = x_3$ 이므로

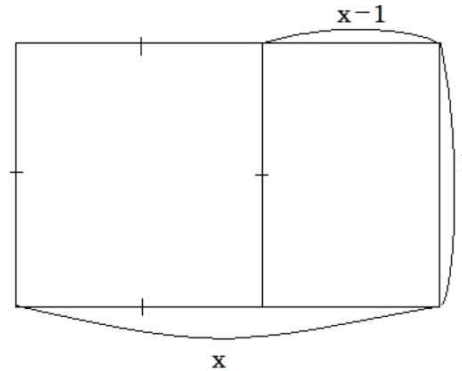
$$\begin{aligned}x_1 + \phi x_1 &= \phi^2 x_1 \\1 + \phi &= \phi^2 \quad (x_1 \neq 0)\end{aligned}$$

이다. 즉 두 번째 비율  $\phi^2$ 은 이전 두 항 1과  $\phi$ 의 합이다. 위 식은  $\phi$ 에 관한 2차 방정식  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ 이 되고, 근의 공식을 사용하면 무리수인 황금비

$$\phi = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$$

를 얻게 된다.

## 황금비의 정의



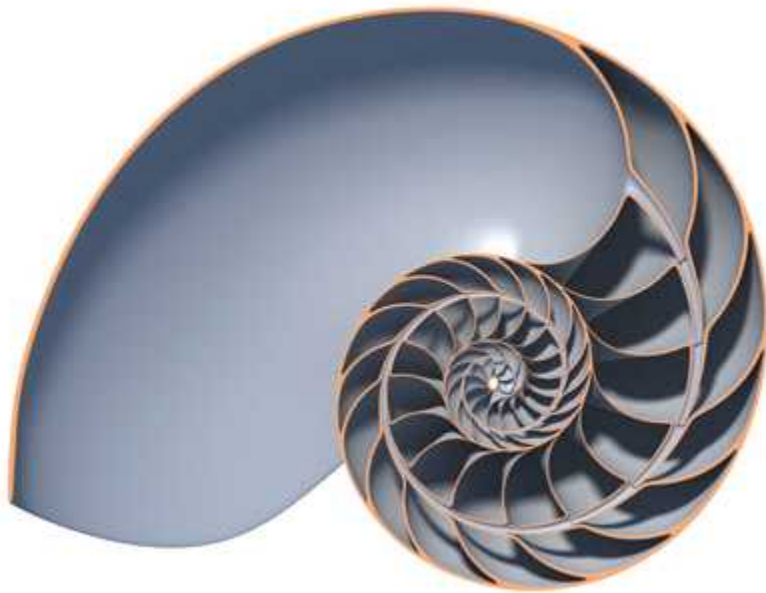
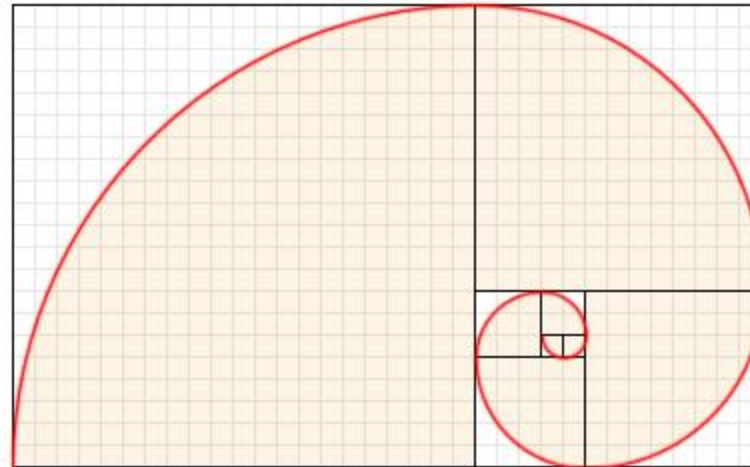
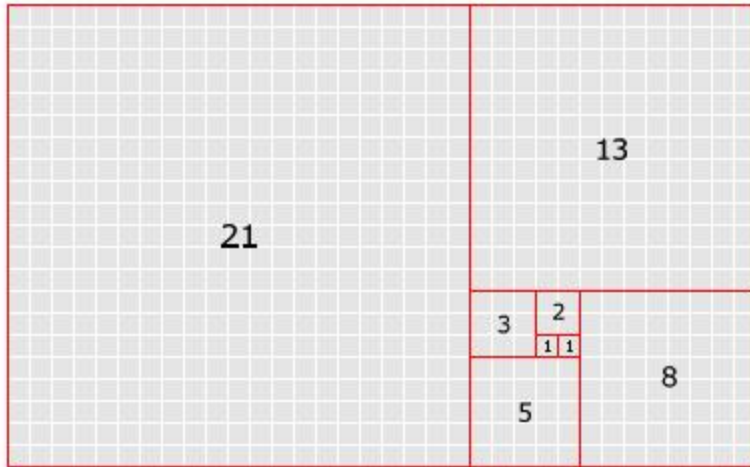
두 개의 작은 사각형 중에서 왼쪽은 정사각형이고 오른쪽 직사각형은 전체 직사각형과 닮은 사각형이다. 이 경우  $x$  를 **황금비**라고 한다. 닮은 비를 이용하면

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}, \quad \frac{1}{x} = x-1, \quad \frac{1}{x} + 1 = x, \quad 1+x = x^2$$

이 성립한다. 즉 비율이  $\frac{1}{x}, 1, x$  또는  $1, x, x^2$

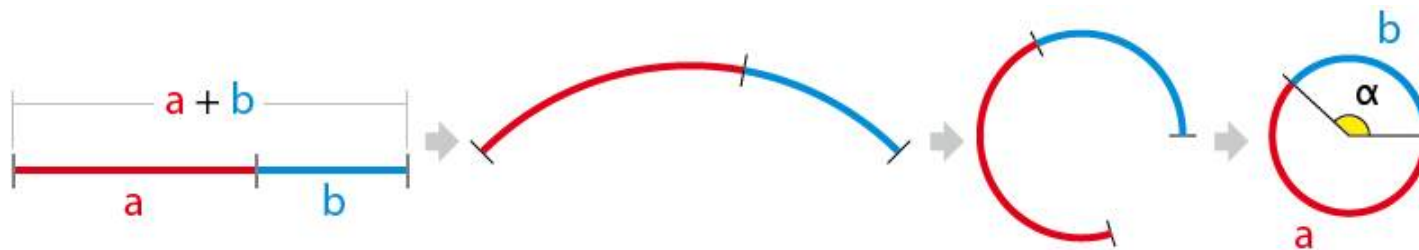
와 같은 자기복제 방식으로 늘어 나면서 앞의 두 항의 합이 다음 항이 되도록 되어 있다. 즉 피보나치 수열의 같은 방식이다.

# 피보나치 나선

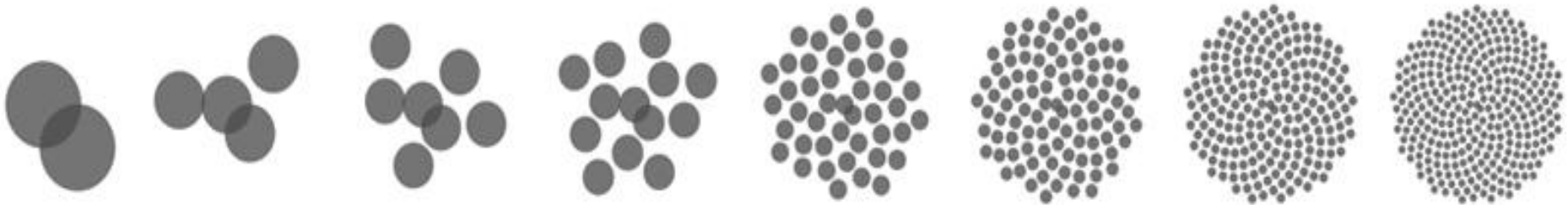
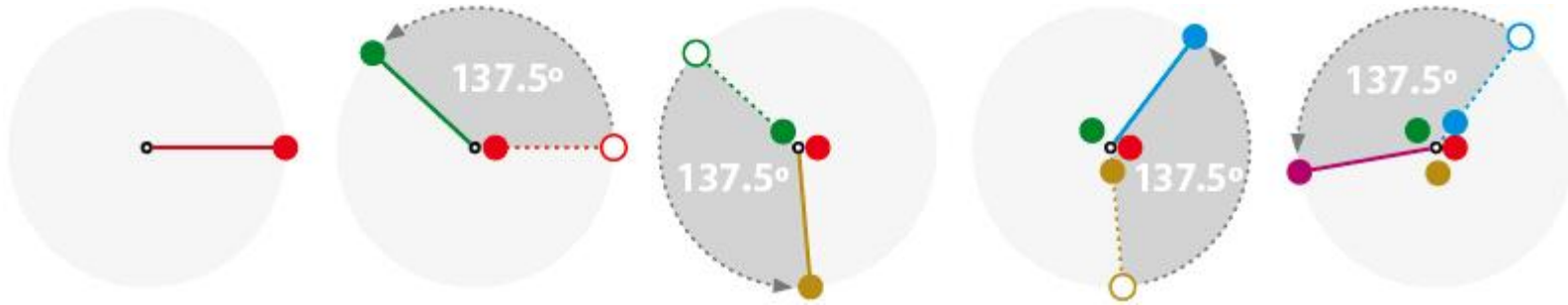


## 황금각

원의 전체 각  $360^\circ$ 를 1:1.618 로 나누는 지점이  $137.5^\circ$ 이다. 이것이 **황금각**이다. 이 각도는  $360^\circ$ 를 가장 "불규칙하게" 나누는 각도로서 어떤 정수비로도 근사되지 않아서 패턴의 반복이 거의 없다. 이 각도로 씨앗이나 잎을 배열해야 겹치지 않고 최소한의 공간에 최대한 밀집하여 배치할 수 있는 **최적의 효율성**을 가질 수 있다. 따라서 이 각도는 식물이 태양빛을 최대한 많이 받거나, 씨앗이 좁은 공간에 꼭 들어차기 위한 각도이다. 식물의 잎차례, 해바라기 씨앗, 솔방울 등에서 나타나는 나선형 배열은 대부분 이 황금각을 따른다.

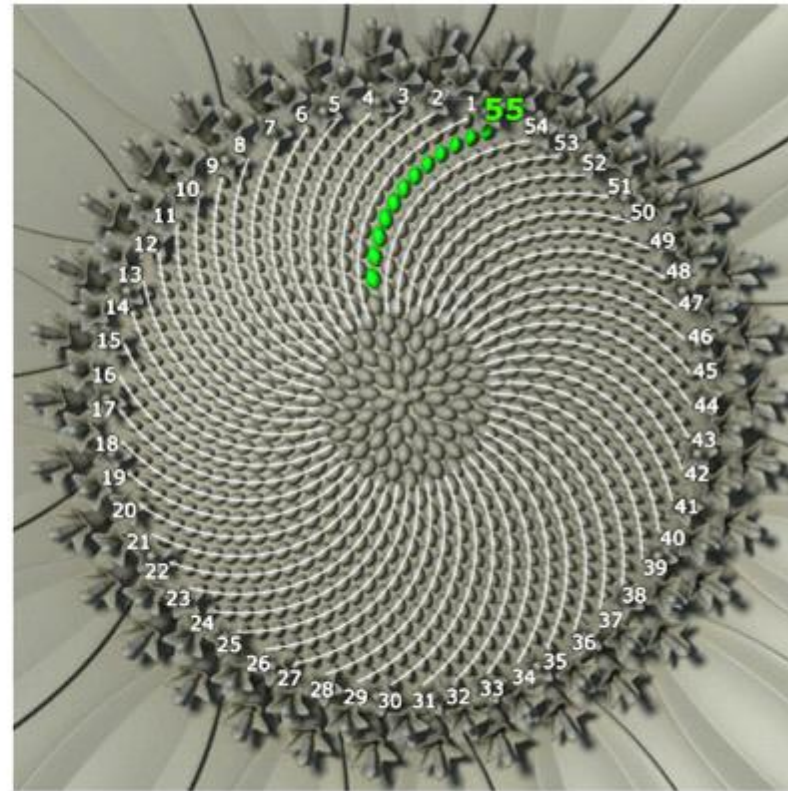
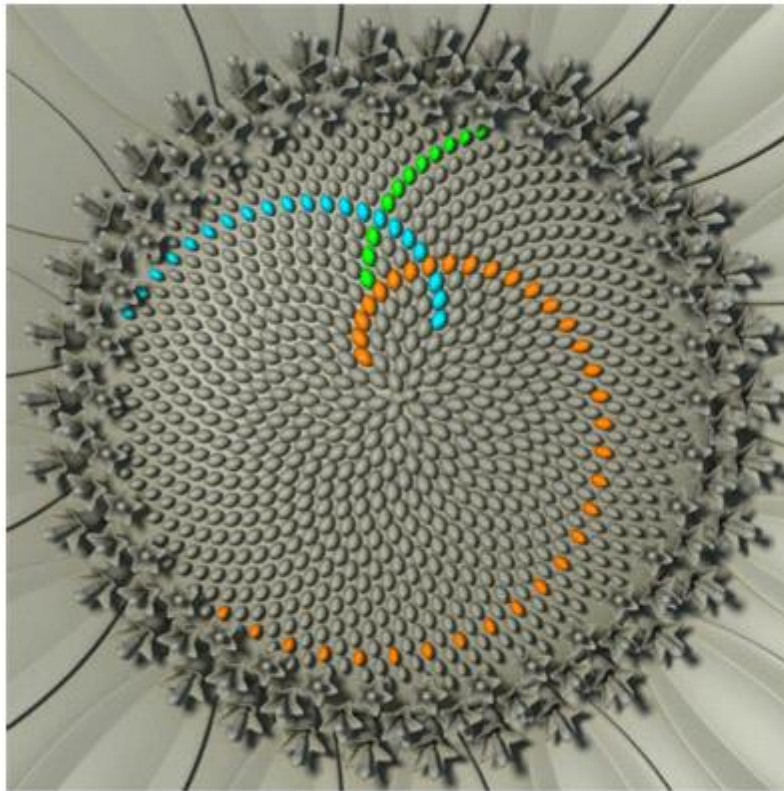


$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi \text{ (Phi)} = 1.61803399... \rightarrow \alpha = 137.507764^\circ... \sim 137.5^\circ$$

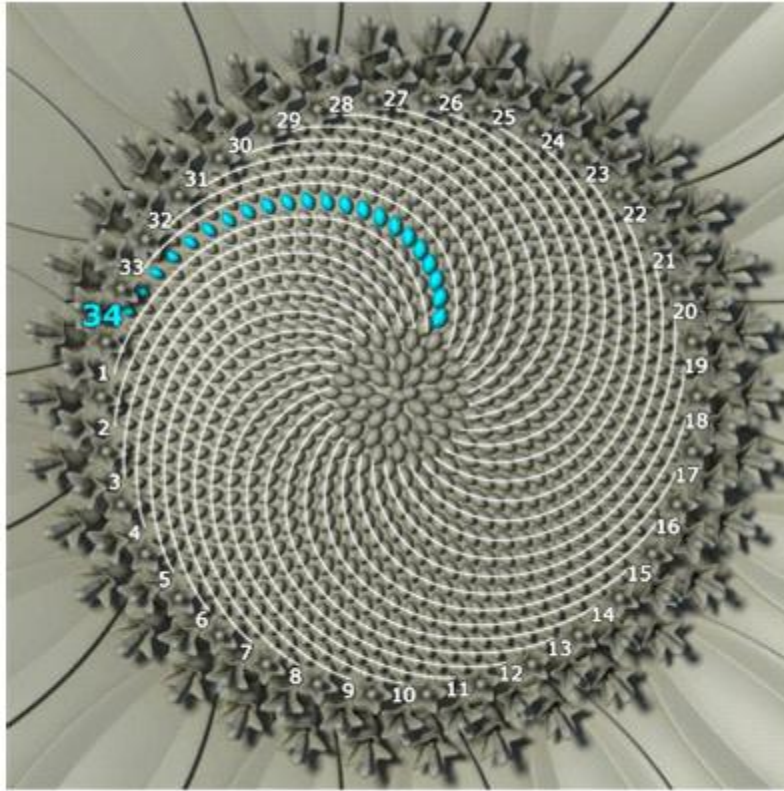




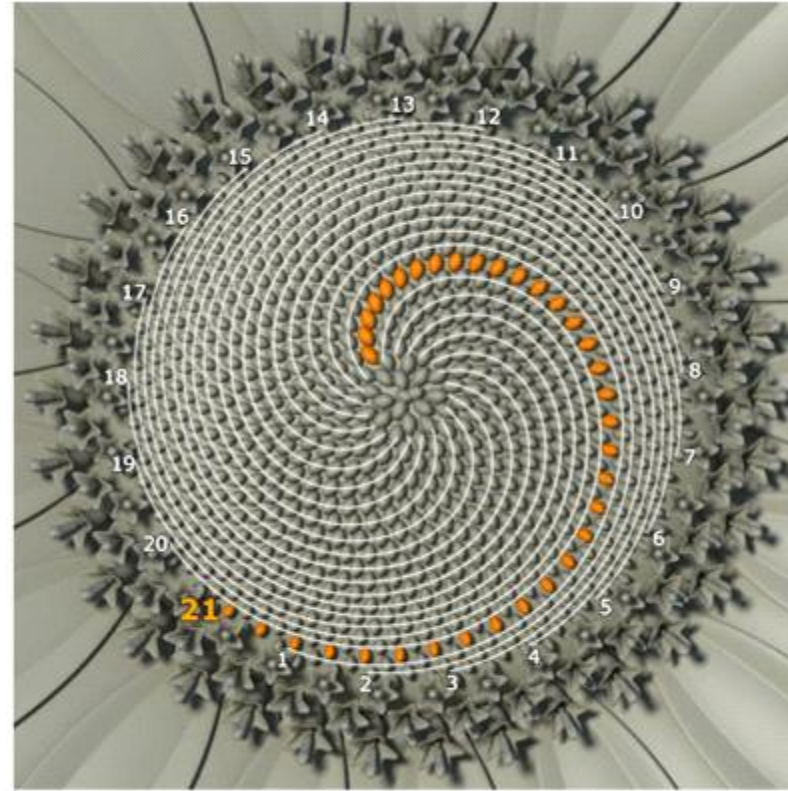
아래 그림을 보면 해바라기 씨앗은 배열되는데 일종의 패턴이 있는 것을 확인할 수 있다. 이 중 3가지를 뽑아 각각 녹색, 파란색, 주황색으로 구분지은 후 배열 회전 수를 확인해보면 나타나는 패턴이 피보나치 수열인 것을 알 수 있다.



0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 **55** 89 144



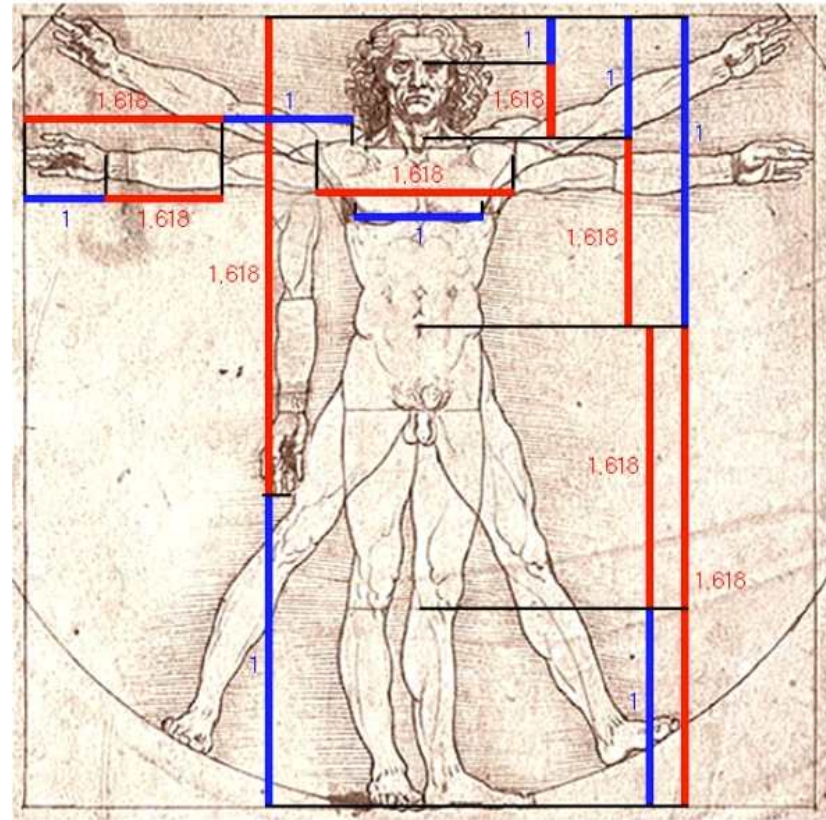
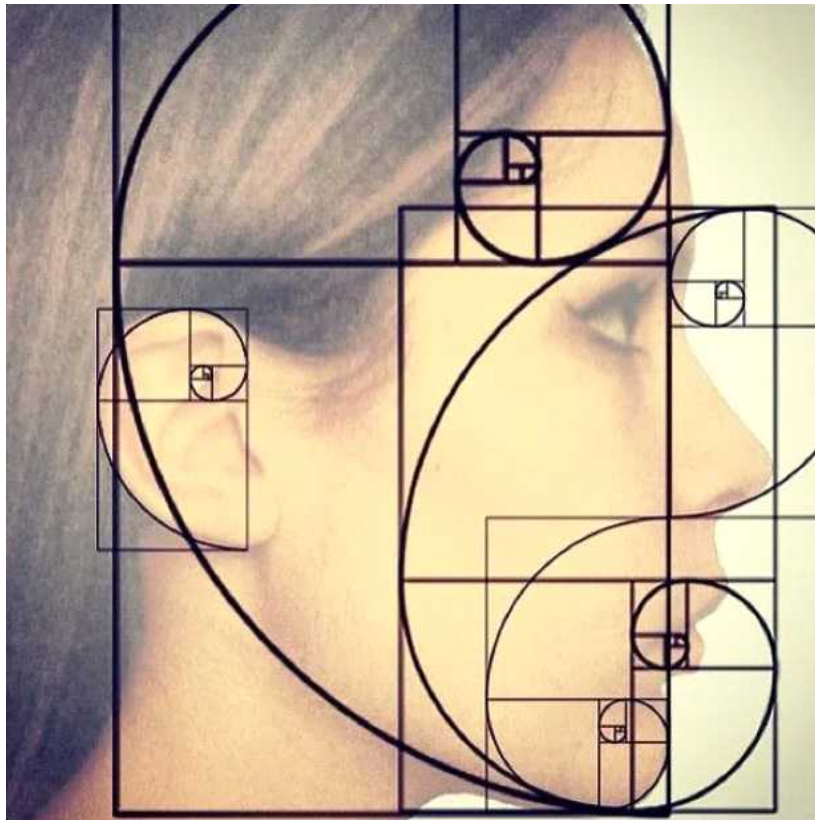
0 1 1 2 3 5 8 13 21 **34** 55 89 144



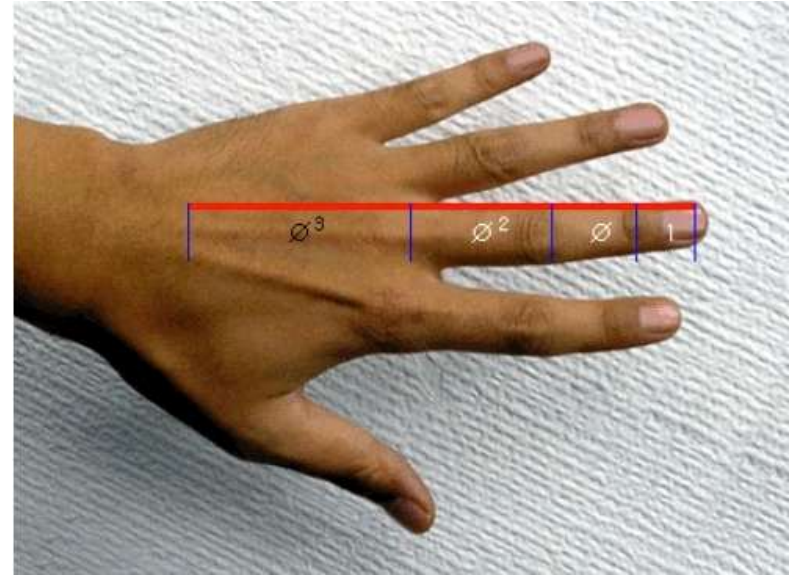
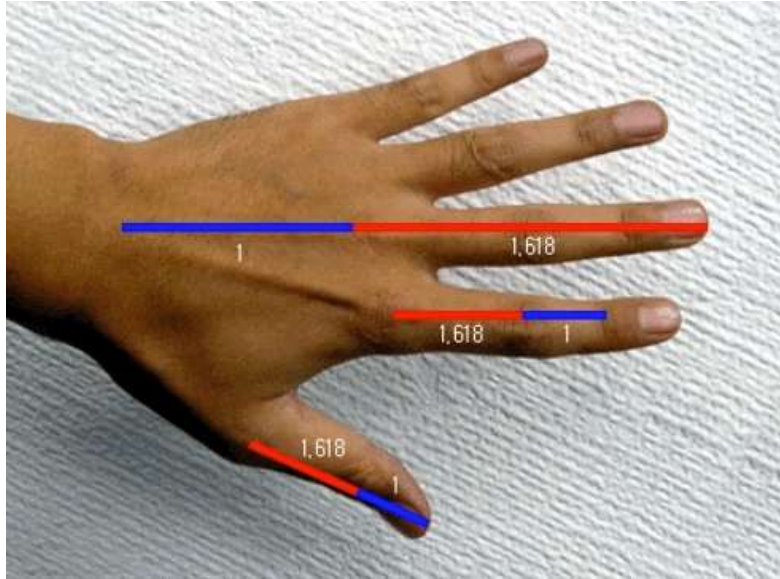
0 1 1 2 3 5 8 13 **21** 34 55 89 144

## 인간의 얼굴과 신체 비율

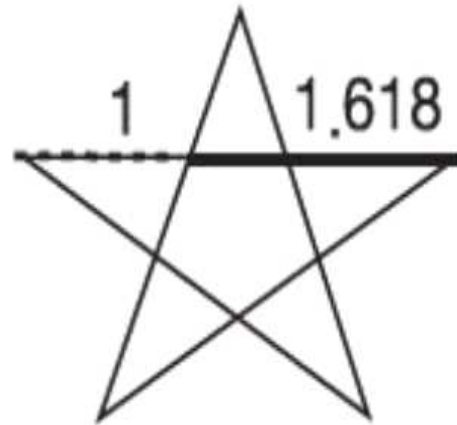
인간 얼굴의 가로 세로를 측정하고 세로 길이를 가로 길이로 나누었을 때 황금 비율에 가까운 숫자가 나오면 그 얼굴은 아름답다고 볼 수 있다. 눈, 코, 입의 위치 및 그들 간의 거리 또한 우리에게 매력으로 작용한다.



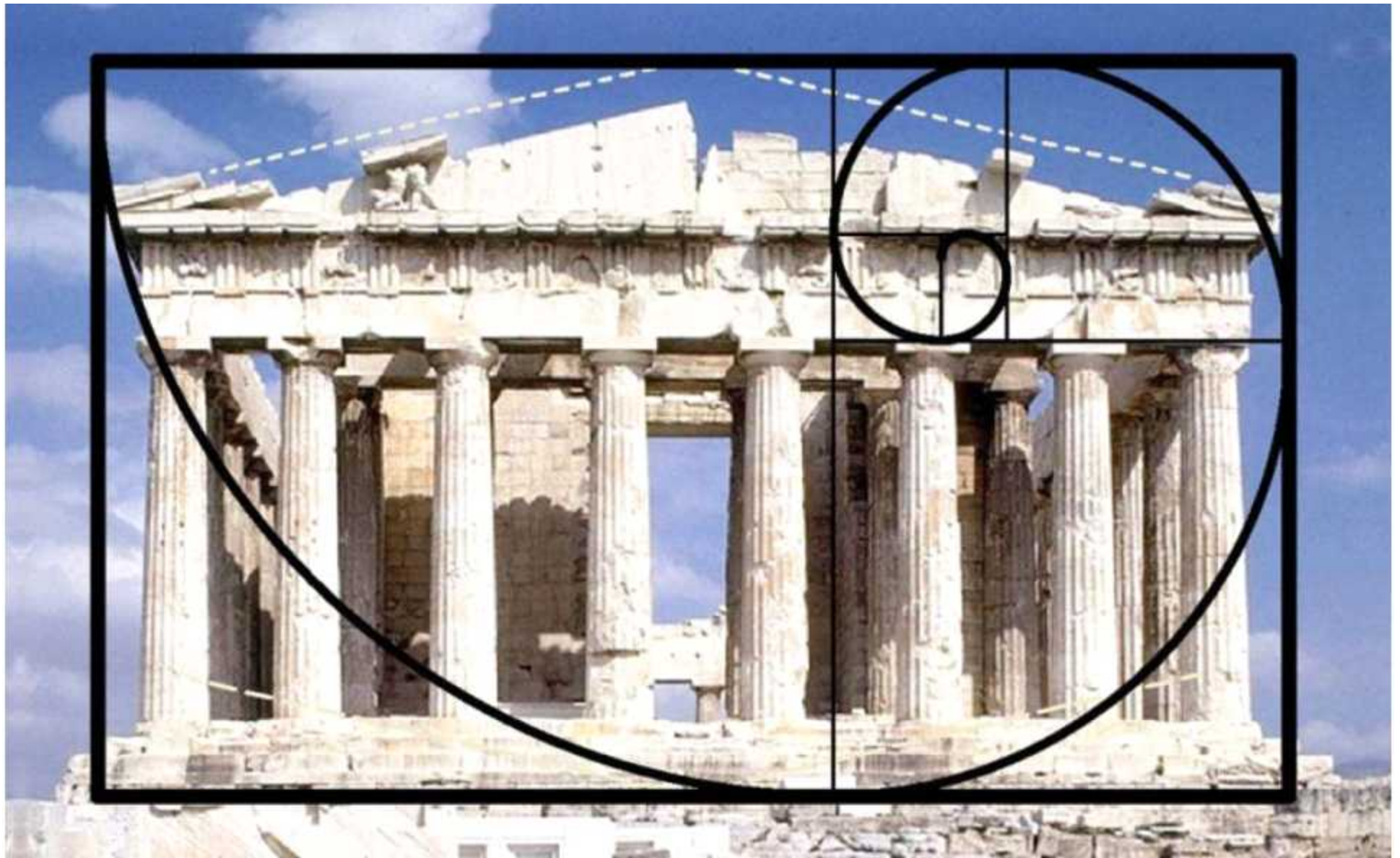
한남대학교 수학과 김상배교수



## 다각형에 나타난 황금비

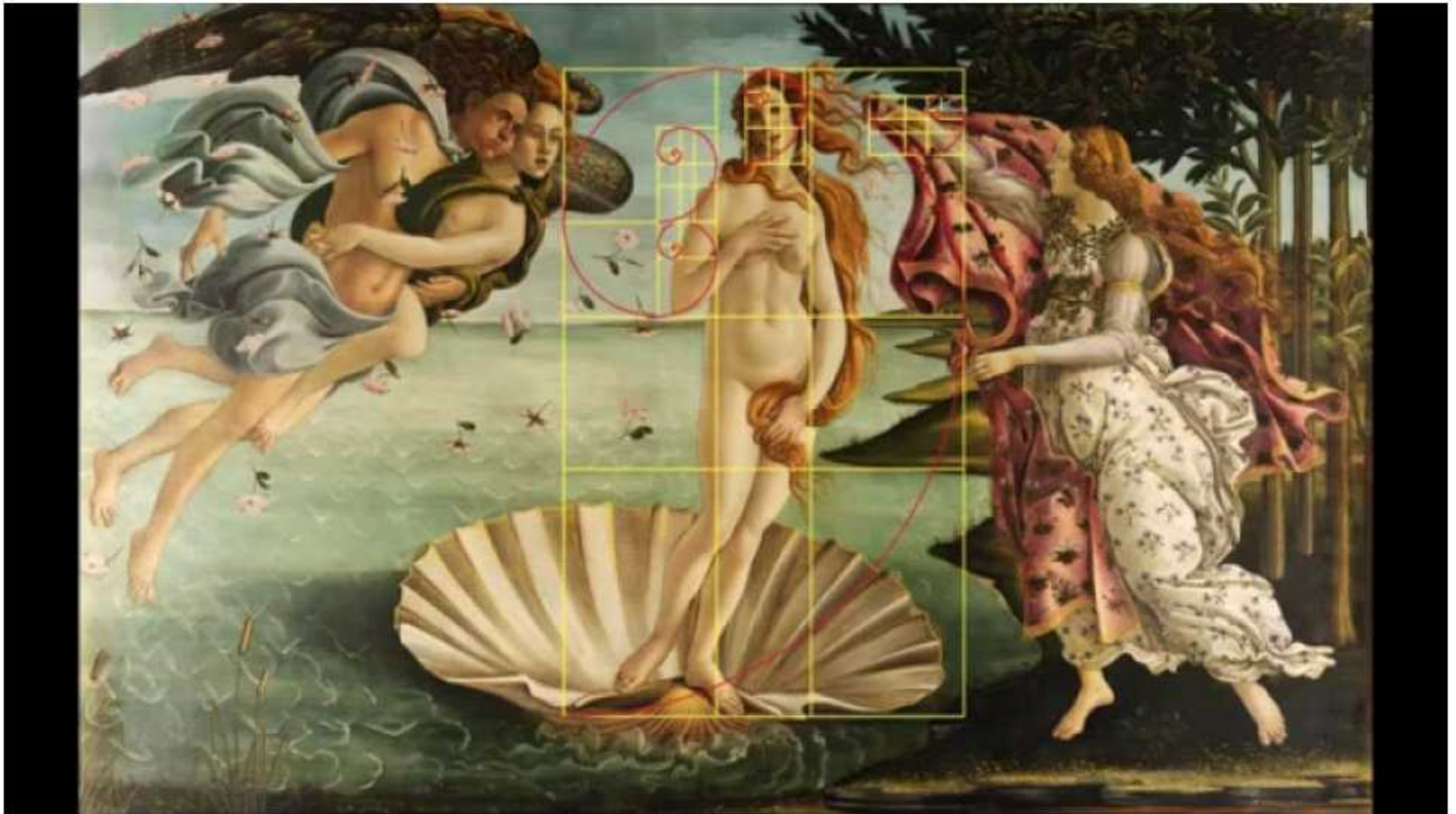


## 파르테논 신전의 황금비



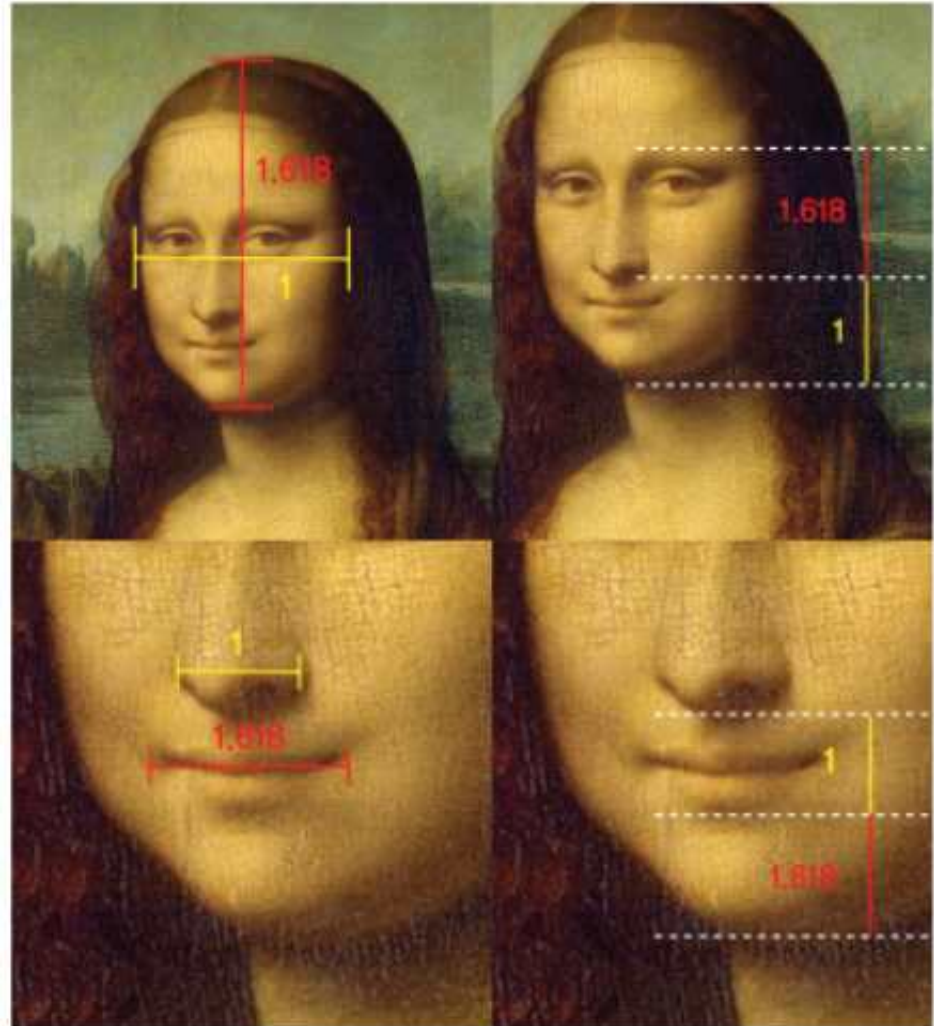
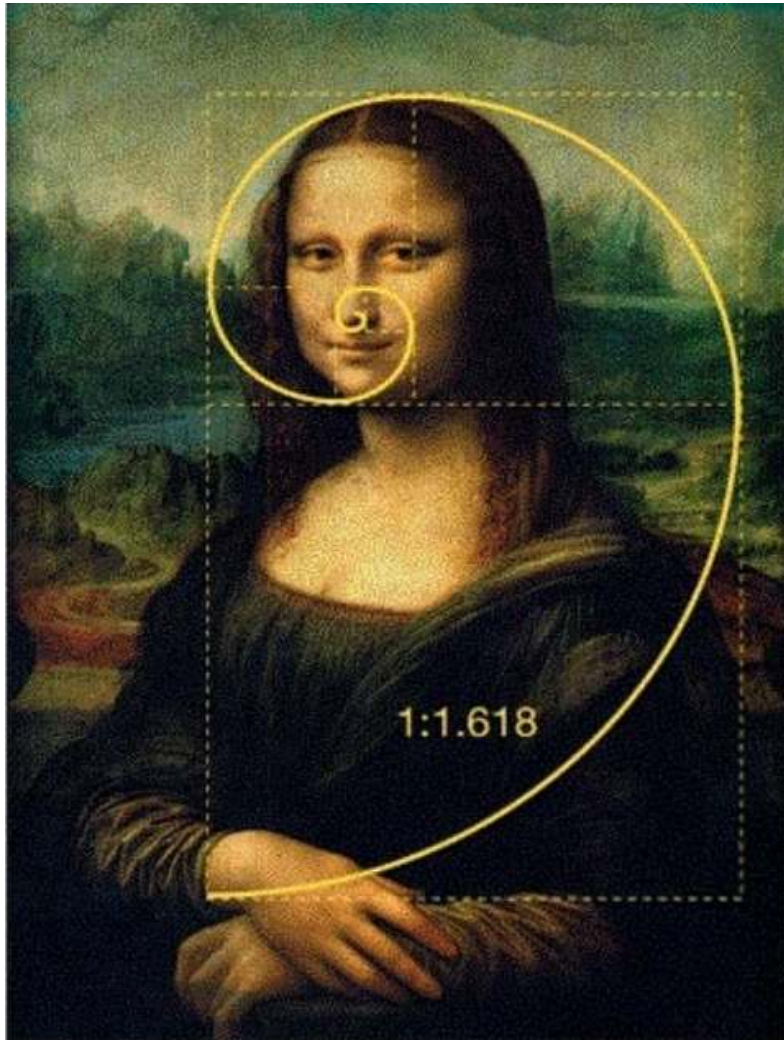
한남대학교 수학과 김상배교수

보티첼리의 "아프로디테의 탄생" 거품 : april 의 어원



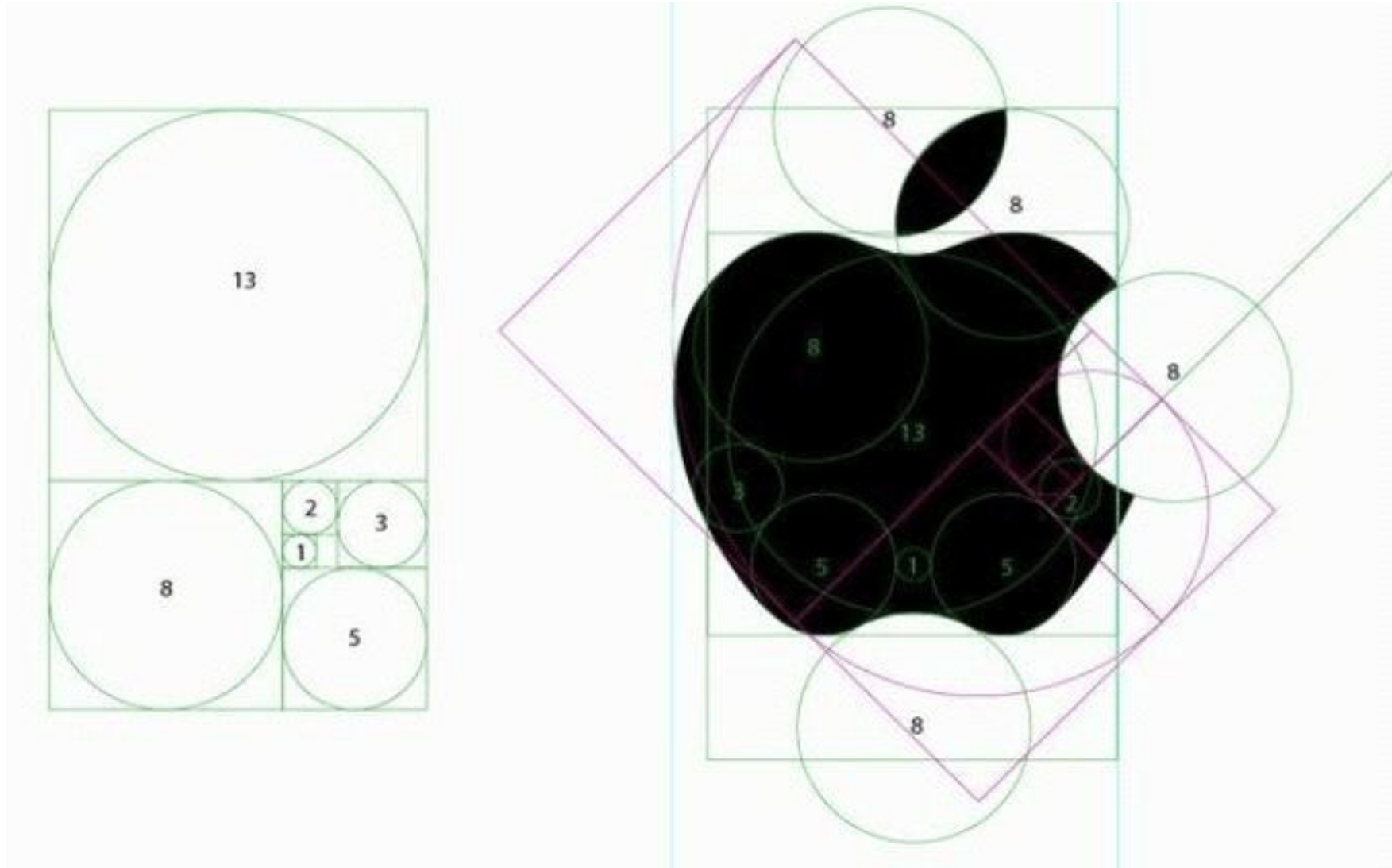


# 레오나르도 다빈치의 "모나리자"

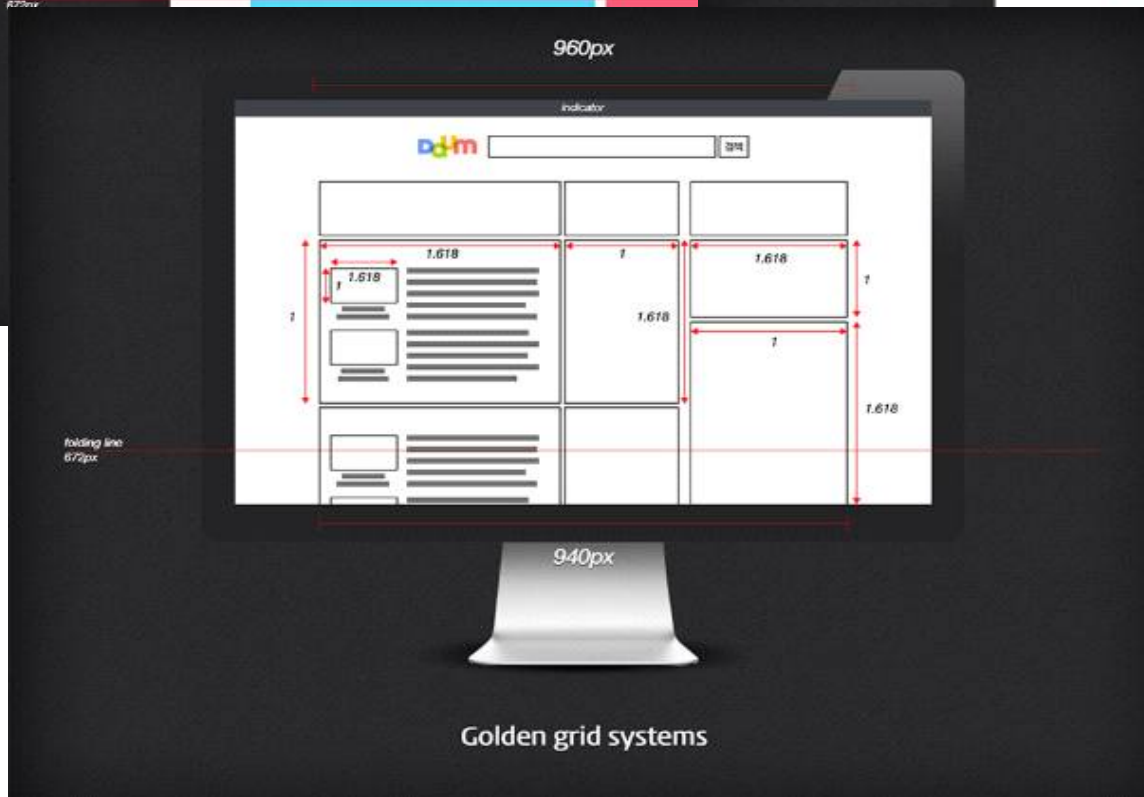


한남대학교 수학과 김상배교수

# 애플사의 사과 로고



# 홈페이지 디자인



Golden grid systems

# 손으로 하는 활동

1. 황금직사각형 그리기

2. 황금나선 그리기

3. 자신의 얼굴 비율 측정

얼굴 전체 높이 : 얼굴 폭

코 길이 : 얼굴 길이,

입 폭 : 코 폭

손가락 마디 길이 비율

팔 전체 길이 : 팔뚝 길이

전체 키 : 배꼽까지의 높이

황금비에 가까운 경우가 많다.

## 마지막 질문

- 자연에는 왜 황금비가 선택되었을까?
- 이것은 우연일까? 최적화일까?

## 1) 완전한 '우연'은 아니다

황금비는 단순한 미적 비율 이상으로 수학적, 기하학적 특징이 있다.

자기유사성(Self similarity)

$$\frac{1}{\phi} + 1 = \phi$$

전체와 부분의 비율이 동일해지는, 드문 수학적 구조.

나선이나 분기 구조를 만들 때 반복하기 쉬움.

피보나치 수열과의 자연스러운 연결

성장 과정에서 "이전 상태 + 그 직전 상태"라는 누적 성장 규칙을

사용하면, 비율이 자동으로 황금비  $\phi$  에 가까워진다.

식물의 잎 배열, 씨앗 배열 등이 이 규칙을 자연스럽게 따른다.

성장 규칙이 단순할 때, 자연스럽게 수렴하는 비율 중 하나가  $\phi$  이다.

## 2) '자연이 황금비를 특별히 선택한 것'은 아니다

모든 생물체가 황금비를 갖는 것은 아니며, 많은 생명체 구조가  $\phi$  와 관계 있는 것은 아니다. 다만 특정한 상황에서  $\phi$  가 다른 비율보다 더 유리한 경우가 있다.

## 3) 자연에서 황금비가 자주 등장하는 이유 = 최적화 문제

황금비는 아래와 같은 구조에서 물리적, 공간적 최적화를 제공한다.

**식물: 최소 중첩 + 최대 채광**

해바라기 씨, 소나무 솔방울, 선인장 가시의 배열에서 씨앗이나 잎이 서로 가장 덜 겹치면서 공간을 가장 촘촘하게 채울 수 있는 각도가 약  $137.5^\circ$  (이는  $360^\circ$ 를  $1:\phi$ 로 나누는 각)으로서 이 각도는 평균 분포 에너지를 최소화 하는 각이다.

## 나선형 구조: 성장의 안정성

성장 과정에서 부분의 크기 비율이 일정하면 전체가 안정적 구조를 유지하는데 이때 비율  $\phi$  일 때 구조가 가장 자연스럽게 파괴적 공진이 적다. 앵무조개의 껍데기 나선, 은하수의 나선, 태풍의 나선, 모두 “정확한” 황금비는 아니지만 비슷한 로그 나선 형태이다. 로그 나선은 어떤 크기로 확대해도 모양이 동일이라는 “확장 불변성”을 가진다. 자연에서는 이런 단순한 규칙을 따르는 구조가 안정적이기 때문에 자주 나타난다.

## 생체 구조: 효율적 힘 분산

사람의 팔, 손가락 뼈 길이 비율 등에서 엄밀한  $\phi$  는 아니지만  $\phi$  와 유사한 값이 나온다. 이는 다음 효과 때문입니다.

**힘 분산의 효율, 구조적 안정성 극대화, 성장 패턴의 단순화**

#### 4) 결론 — “우연 + 제약조건 속 효율성 = 황금비”

자연은 황금비 자체를 “목표”로 하지 않는다.

단순한 반복 성장 규칙을 갖는 구조에서  $\phi$  로 수렴하기 쉽다.

공간배치, 에너지최소화, 힘분산 등의 최적화문제에서  $\phi$  가 좋은 해이다.

그래서 자연선택 과정에서  $\phi$  근처 값이 발견되고 유지되는 경우가 많다.

즉, 황금비는 자연이 선호하는 것이 아니라, 자연의 제약 조건 속에서

가장 잘 살아남는 구조가 우연히  $\phi$  에 가깝기 때문이다.